

— 数 値 解 析 —

(補)

財団
法人 日本情報処理開発センター

LIB-000



6807

数 値 解 析

(補)

財団法人 日本情報処理開発センター

目 次

1. 準備 (FORTRANによるプログラミングの基礎)	1
2. 数値計算とプログラミング	
2.1 方程式の根	2
2.2 数値積分	3
2.3 応用1 (FMパルス伝送の計算)	4
3. 線型計算のプログラム	
3.1 ベクトルの内積	40
3.2 行列の積	40
3.3 対称行列の固有値および固有ベクトル	41
3.4 連立1次方程式	41
4. 微分方程式	
4.1 Runge-Kutta-Gill法	43
4.2 楕円型偏微分方程式の数値解法	44
4.3 応用2 (アーチダムに作用する地震時動水圧の数値解)	54

1. 準備 (FORTRANによるプログラミングの基礎)

次の問題をFORTRANでプログラムしてみよう。

(問題1) 数表づくり

$n = 1, \dots, 99$ に対して $n, n^2, n^3, \sqrt{n}, \frac{1}{n}$ の表を作ること。

(答) 第1図

(問題2) n 個の観測データを読みとって、その平均値と標準偏差を計算して印刷すること。

(答) 第2図

(問題3) n 個のデータを読みとり、逆順に印刷すること。

(答) 第3図

(問題4) 問題3のデータをつかって平均値と標準偏差を計算して印刷すること。

(答) 第4図

FORTRANプログラミングで留意する事項

- 整数型 (I ~ N) と実数型 (A ~ H, O ~ Z)
- 演算の順序 (+, -, *, /, **, 2)
- DOによるくりかえし法
- READ, WRITE と FORMAT
- 添字変数, DIMENSION
- その他

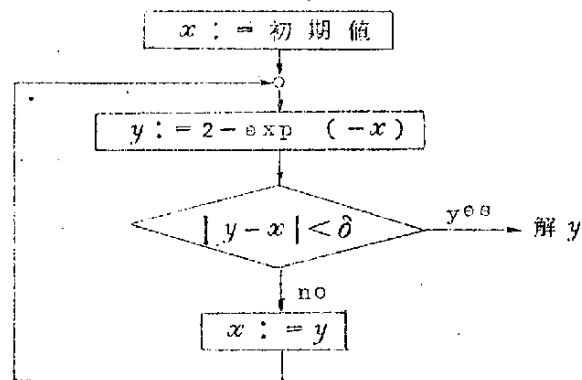
2. 数値計算とプログラミング

2.1 方程式の根

逐次近似によって方程式の根を求める二、三の方法をプログラムしてみよう。

- (i) 単純な代入法 $x = f(x)$ を $x_{i+1} = f(x_i)$ の反復図式で解く。

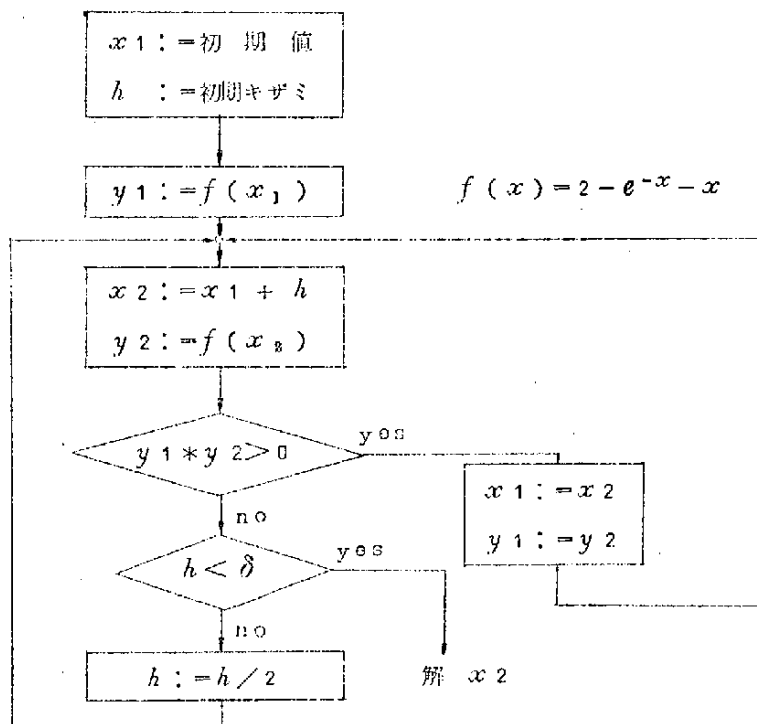
(問題5) $x + e^{-x} = 2$ の正根を求めること。



(答) 第5図

- (ii) はさみうち法 $f(x) = 0$ を はさみうち の反復図式で解く。

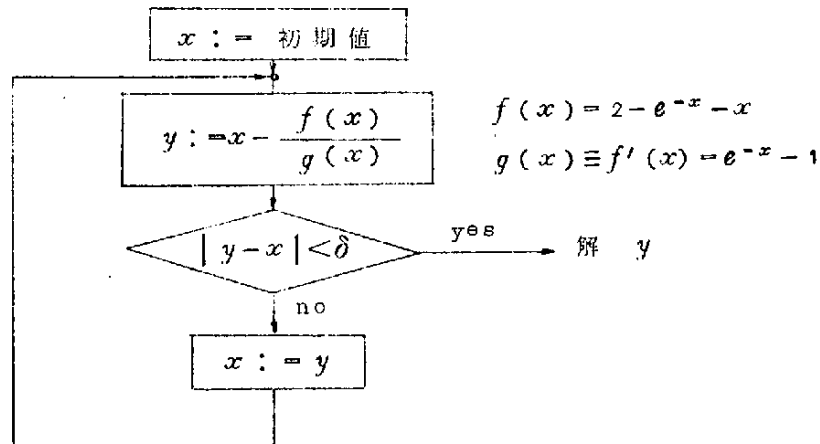
(問題6) $x + e^{-x} = 2$ の正根を求めること。



(答) 第6図

(iii) Newton-Raphson 法 $f(x) = 0$ を $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ の反復図式で解く。

(問題 7) $x + e^{-x} = 2$ の正根を求めること。

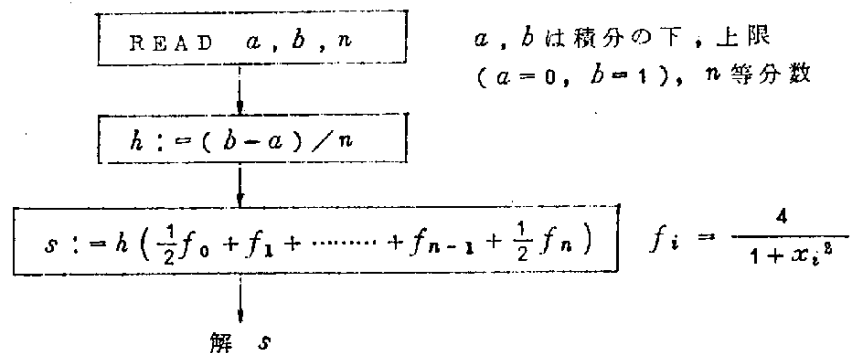


(答) 第 7 図

2.2 数 値 積 分

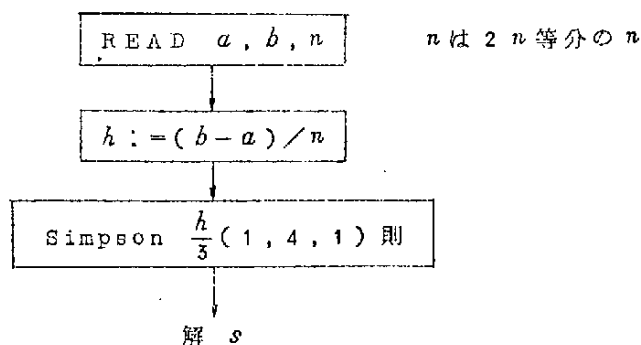
最も単純な台形則および比較的精度のよい Simpson 則を使った定積分プログラムを書いてみよう。

(問題 8) $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ の 0 から 1 までの定積分を台形則によって求めること。



(答) 第 8 図

(問題 9) $f(x) = \frac{4}{1+x^2}$ の 0 から 1 までの定積分を Simpson の $\frac{h}{3}(1, 4, 1)$ 則によって求めること。



(1, 4, 1) のパターンをプログラムするのに何通りかの工夫ができる。

① (1, 4, 1) を n 回くりかえす。

② 係数 4, 2 を交互にくりかえす。

など。

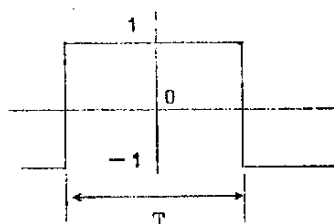
(答) 第 9-1 図, 第 9-2 図

2.3 応 用 1 (FM パルス伝送の計算)

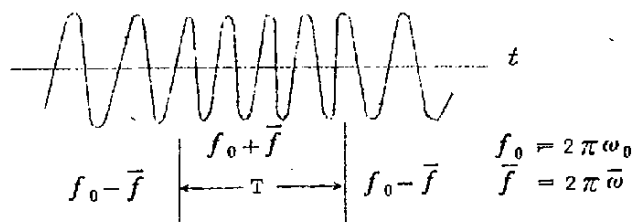
(今出重夫：電力用通信回線の伝送特性に関する研究，
電力中央研究所技術研究所報告 66014，昭 4 1.5
より。)

通信回線を通過する a 図のような FM パルス信号が，回線の伝送路特性によってある歪みを受けて受信される。

歪みは伝送路の振幅特性，位相特性，伝送速度（毎秒パルス数）などによって種々かわるが，その形状を正確に計算したい。



(I) 原パルス



(II) 原パルスの周波数変調信号 $E_s^0(t)$

a 図

周波数変調信号 $E_s^0(t) = \sin\left[\omega_0 t + \varphi_0 - \bar{\omega}\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] + E_{sm}^0(t)$, $\varphi_0 = \frac{\omega_0}{2} T$

$$\text{したがって } E_{sm}^0(t) = \begin{cases} -\sin\left[\omega_0 t + \varphi_0 - \bar{\omega}\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] + \sin\left[\omega_0 t + \varphi_0 + \bar{\omega}\left(t + \frac{T}{2}\right)\right] & \left(-\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}\right) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

(1) $E_{sm}^0(t)$ の Fourier 変換

$$S_{sm}(\omega) \equiv |S(\omega)| e^{j\angle S(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} E_{sm}(t) e^{-j\omega t} dt \quad ; \quad S(-\omega) = S(\omega)$$

(2) 伝送路の振幅特性

$$A(\omega) \equiv |A(\omega)| e^{j\angle A(\omega)} \quad ; \quad A(-\omega) = A(\omega)$$

(1), (2)より $E_{sm}^0(t)$ の出力信号 $E_{sm}(t)$ は

$$E_{sm}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |S(\omega)| |A(\omega)| \cos(\angle S(\omega) + \angle A(\omega) + \omega t) d\omega$$

ここで $\omega = \omega_0 + u$ と変数変換する。

$$|S(\omega_0 + u)| = s(u), \quad \angle S(\omega_0 + u) = \varphi_0' + \xi(u)$$

$$|A(\omega_0 + u)| = a(u), \quad \angle A(\omega_0 + u) = -\phi_0 - \psi(u)$$

$$a(-u) = a(u)$$

$$\psi(-u) = -\psi(u)$$

より

$$\begin{aligned} E_{sm}(t) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} s(u) a(u) \cos[\omega_0 t + ut + \xi(u) - \psi(u) + \varphi_0' - \phi_0] du \\ &= P \cos \omega_0 t - Q \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} s(u) a(u) \cos[ut + \xi(u) - \psi(u) + \varphi_0' - \phi_0] du \\ Q &= \frac{1}{\pi} \int_{-\omega_0}^{\infty} s(u) a(u) \sin[ut + \xi(u) - \psi(u) + \varphi_0' - \phi_0] du \end{aligned}$$

故に

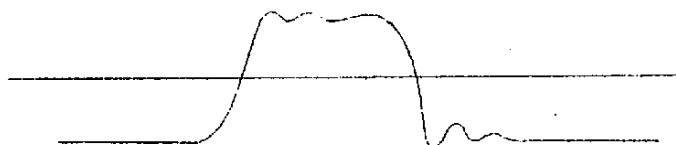
$$\begin{aligned}
E_s(t) &= a(-\bar{\omega}) \sin \left[\omega_0 t + \varphi_0 - \bar{\omega} \left(t + \frac{T}{2} \right) - \psi(-\bar{\omega}) \right] + E_{sm}(t) \\
&= a(\bar{\omega}) \sin \left[\omega_0 t + \varphi_1 \right] + E_{sm}(t), \quad \varphi_1 = \varphi_0 - \bar{\omega} \left(t + \frac{T}{2} \right) + \psi(\bar{\omega}) \\
&= a(\bar{\omega}) \sin \omega_0 t \cos \varphi_1 + a(\bar{\omega}) \cos \omega_0 t \sin \varphi_1 + E_{sm}(t) \\
&= (P + a(\bar{\omega}) \sin \varphi_1) \cos \omega_0 t - (Q - a(\bar{\omega}) \cos \varphi_1) \sin \omega_0 t \\
&= a(\bar{\omega}) \sqrt{(\mu P + \sin \varphi_1)^2 + (\mu Q - \cos \varphi_1)^2} \cos(\omega_0 t + \Phi)
\end{aligned}$$

ここに $\mu = 1/a(\omega)$

$$\Phi(t) = \tan^{-1} \frac{\mu Q - \cos \varphi_1}{\mu P + \sin \varphi_1}$$

周波数変調信号 $E_s(t)$ の復調は $\frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ により得られる。

$\frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ はたとえば b 図のようになるはずである。



b 図 復調されたパルス信号

(i) Fourier 変換

$$S(\omega) \equiv S(\omega_0 + u) = s(u) = s_1(u) + j s_2(u)$$

$$\begin{aligned}
s_1(u) &= \frac{1}{u + \bar{\omega}} \sin(u + \bar{\omega}) \frac{T}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega} T}{2} - \varphi_0\right) \\
&+ \frac{1}{u - \bar{\omega}} \sin(u - \bar{\omega}) \frac{T}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega} T}{2} + \varphi_0\right) \\
&+ \frac{1}{2\omega_0 + u + \bar{\omega}} \sin(2\omega_0 + u + \bar{\omega}) \frac{T}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega} T}{2} + \varphi_0\right) \\
&+ \frac{1}{2\omega_0 + u - \bar{\omega}} \sin(2\omega_0 + u - \bar{\omega}) \frac{T}{2} \sin\left(\frac{\bar{\omega} T}{2} - \varphi_0\right),
\end{aligned}$$

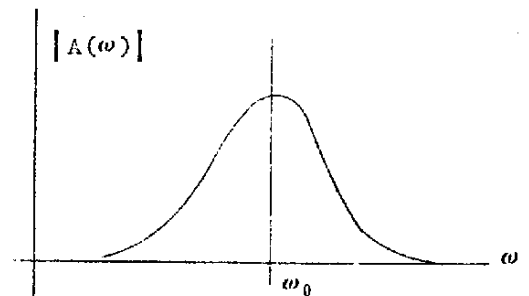
$$\begin{aligned}
s_2(u) &= \frac{1}{u+\bar{\omega}} \sin(u+\bar{\omega}) \frac{T}{2} \cos\left(\frac{\bar{\omega}T}{2} - \varphi_0\right) \\
&\quad - \frac{1}{u-\bar{\omega}} \sin(u-\bar{\omega}) \frac{T}{2} \cos\left(\frac{\bar{\omega}T}{2} + \varphi_0\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\omega_0 + u + \bar{\omega}} \sin(2\omega_0 + u + \bar{\omega}) \frac{T}{2} \cos\left(\frac{\bar{\omega}T}{2} + \varphi_0\right) \\
&\quad - \frac{1}{2\omega_0 + u - \bar{\omega}} \sin(2\omega_0 + u - \bar{\omega}) \cos\left(\frac{\bar{\omega}T}{2} - \varphi_0\right)
\end{aligned}$$

(ii) 伝送路特性

$$A(\omega) \equiv |A(\omega)| e^{j\psi(\omega)}$$

$$|A(\omega)| = e^{-A_0 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\bar{\omega}}\right)^2}$$

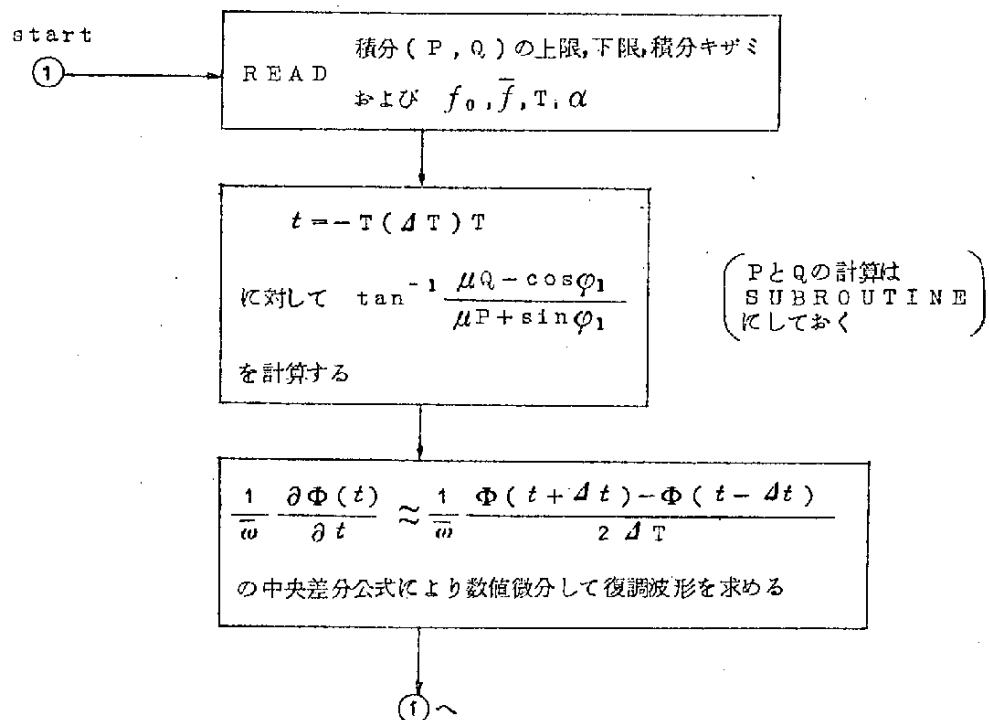
$$\psi(\omega) = \frac{\alpha\pi}{90} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\bar{\omega}}\right)^3$$



ω_0 で減衰 0, 遅れ 0

(i), (ii)を用いて $\frac{1}{\bar{\omega}} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t}$ を数値計算する。

プログラム手順



WRITTEN BY _____

DATE _____

[illegible]

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

COMM	STATE- MENT NUMBER	CONT	FORTRAN STATEMENT															IDENT	
			1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80		
C																		005	
																		010	
	200																	015	
C																		020	
																		025	
	100																	030	
																		035	
																		040	
																		045	
																		050	
	101																	055	
																		060	
	1																	065	
																		070	
																		075	
																		080	
	201																	085	
																		090	
																		095	
																		100	

FORTRAN DATA SHEET

PROGRAM

WRITTEN BY

DATE _____

17

435

181

382

2311

482

405

175

192

208

196

350

461

388

254

280

202

364

PAGE OF

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

COMM	STATE- MENT NUMBER		CONT	FORTRAN STATEMENT																IDENT	
	1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80						
C							MONDAI 3													005	
							DIMENSION DATA(1000)													010	
							WRITE(6,200)													015	
	200						FORMAT(1H1,39HPRINT OUT THE DATA IN THE REVERSE ORDER/1)													020	
C																				025	
							READ(5,100) N													030	
	100						FORMAT(I6)													035	
							READ(5,101) (DATA(I),I=1,N													040	
	101						FORMAT(6F12.0)													045	
							DO 1 I=1,N													050	
							J=N+1-I													055	
	1						WRITE(6,201) DATA(J)													060	
	201						FORMAT(1H0,8X,F15.3)													065	
							STOP													070	
							END													075	
																				080	
																				085	
																				090	
																				095	
																				100	

FORTRAN DATA SHEET

[illegible]

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

COMM		STATE- MENT NUMBER	CONT	FORTRAN STATEMENT													IDENT	
1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80				
C						MONDAI 4								005				
						DIMENSION DATA(1000)								010				
						WRITE(6,200)								015				
	200					FORMAT(1H1,29H	CALCULATION OF MEAN	AND STD V(1)						020				
C														025				
						READ(5,100) N								030				
	100					FORMAT(16)								035				
						READ(5,101) (DATA(I),I=1,N)								040				
	101					FORMAT(6F12.0)								045				
C														050				
						X=0.								055				
						S=0.								060				
						DO 1 I=1,N								065				
						X=X+DATA(I)								070				
	1					S=S+DATA(I)**2								075				
						X=X/FL0AT(N)								080				
						S=SQRT(S/FL0AT(N)-X**2)								085				
						WRITE(6,201) N,X,S								090				
	201					FORMAT(1H,9X,3HN =I3,4X,6HMEAN =E12.5,4X,7HSTD V =E12.5)								095				
						STOP								100				

END

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

CONT 1	STATE- MENT NUMBER 2	CONT 5	FORTRAN STATEMENT																IDENT	
			6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80						
C					MONDAI 5														005	
					READ(5,10) X0, DELTA														010	
					X=X0														015	
C					LOOP														020	
	1				Y=2.0 - EXP(-X)														025	
					IF(ABS(Y-X)-DELTA) 3,2,2														030	
	2				X=Y														035	
					GO TO 1														040	
	3				WRITE(6,11) Y														045	
	11				FORMAT(1H1,9X,15HP0SITIVE ROOT =F8.5)														050	
	10				FORMAT(2F12.0)														055	
					STOP														060	
					END														065	
																			070	

PROGRAM

FORTRAN DATA SHEET

WRITTEN BY

DATE

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75	80
		00.000001													

WRITTEN BY: _____

DATE _____

-15-

END.

PAGE OF

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

STATE - MENT NUMBER		CONT		FORTRAN STATEMENT																IDENT	
1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	8							
C					MONDAI 7										005						
					READ(5,10) X0, DELTA										010						
	10				FORMAT(F12.0, E12.5)										015						
					X=X0										020						
C					LOOP										025						
	1				Z=EXP(-X)										030						
					Y=X-(2.0-Z-X)/(Z-1.0)										035						
					IF(ABS(Y-X)-DELTA) 3,2,2										040						
	2				X=Y										045						
					GO TO 1										050						
	3				WRITE(6,11) Y										055						
	11				FORMAT(1H1, 9X, 15HP0SITIVE ROOT =F8.5)										060						
					STOP										065						
					END										070						
															075						

PROGRAM										FORTRAN DATA SHEET										WRITTEN BY					DATE				
5		10		15		20		25		30		35		40		45		50		55		60		65		70		75	
		1.0				E-06																							

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

COMM			STATEMENT NUMBER		CONT	FORTRAN STATEMENT												IDENT	
1	2	5	6	7		10	20	30	40	50	60	70	72	73	80				
C							MONDAI 9	SIMPSON	(PROGRAM-1)						005				
	2						READ(5,100) A,B,N								010				
	100						FORMAT(2F12.0,I6)								015				
							H=(B-A)/FLOAT(N*2)								020				
							S=0.								025				
							DO 1 I=1,N								030				
							X1=A+2.*H*FLOAT(I-1)								035				
							X2=X1+H								040				
							X3=X2+H								045				
	1						S=S + FUNC(X1)+4.*FUNC(X2)+FUNC(X3)								050				
							S=H*S/3.0								055				
							WRITE(6,200) A,B,N,S								060				
	200						FORMAT(1H1,28HQUADRATURE TEST PROBLEM, A =F8.4,3X,3HB =F8.4,3X,								065				
							13HN =I4,5H, 8H RESULT =F10.5)								070				
							GO TO 2								075				
							END								080				
							FUNCTION FUNC(X)								085				
							FUNC=4./(1.+X**2)								090				
							RETURN								095				
							END								100				
							0.												
							1.												
							5												

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

COMM	STATE- MENT NUMBER	CONT	FORTRAN STATEMENT										IDENT	
1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80
C					MONDAI 9	SIMPSON (PROGRAM-2)								0:05
	2				READ(5,100) A,B,N									0:10
					FORMAT(2F12.0,I6)									0:15
					H=(B-A)/FLOAT(N*2)									0:20
					S=0.									0:25
					KEY=1									0:30
					M=2*N-1									0:35
					DO 1 I=1,M									0:40
					X=A+H*FLOAT(I)									0:45
					GO TO (10,20),KEY									0:50
	10				S=S+4.*FUNC(X)									0:55
					KEY=2									0:60
					GO TO 1									0:65
	20				S=S+2.*FUNC(X)									0:70
					KEY=1									0:75
	1				CONTINUE									0:80
					S=H*(S+FUNC(A)+FUNC(B))/3.0									0:85
					WRITE(6,200) A,B,N,S									0:90
	200				FORMAT(1H1,28HQUADRATURE TEST PROBLEM, A =F8.4,3X,3HB =F8.4,3X,									0:95
					13HN =14,5X, 8HRESULT =F10.5)									1:00

PAGE OF

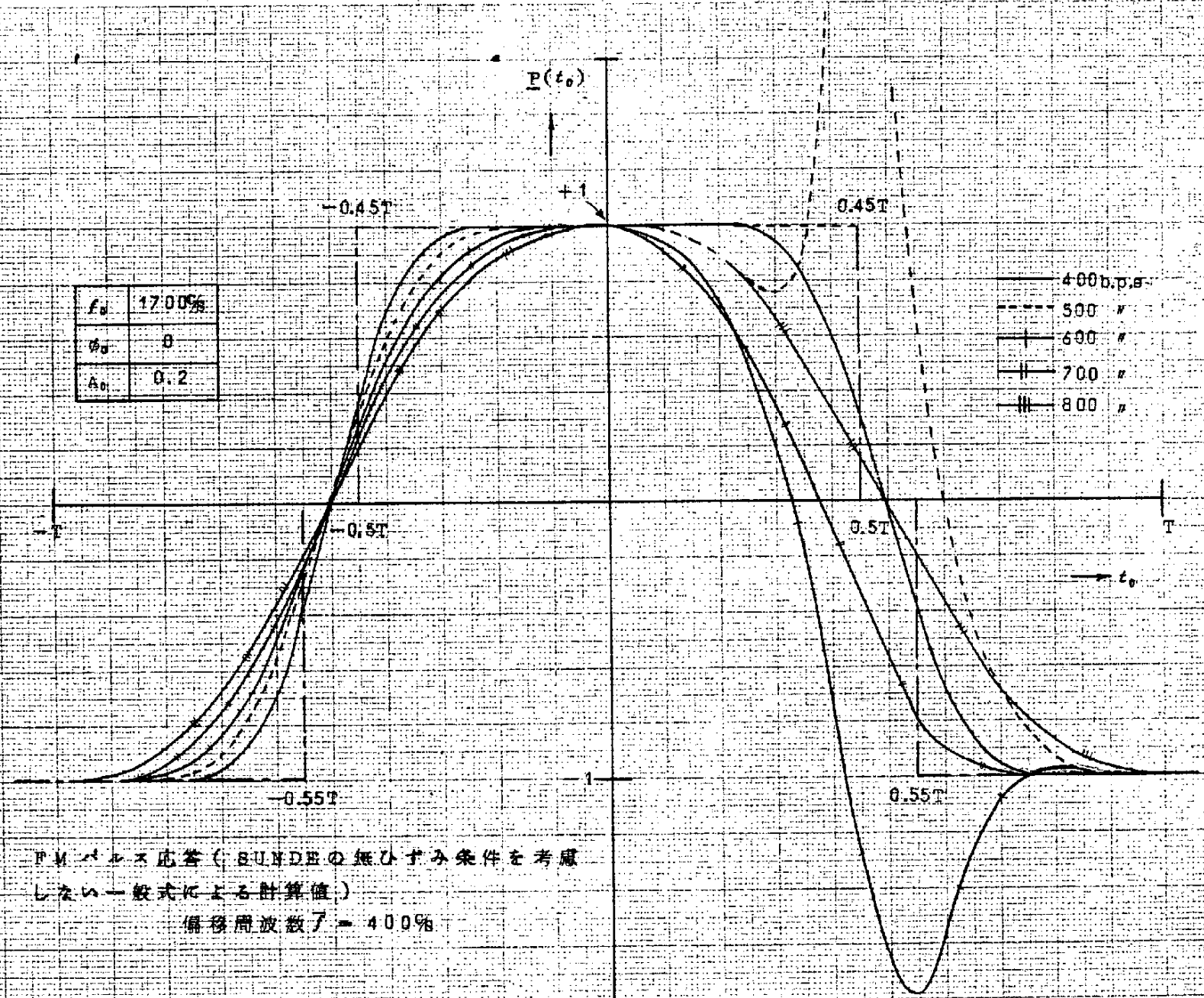
FORTRAN CODING SHEET

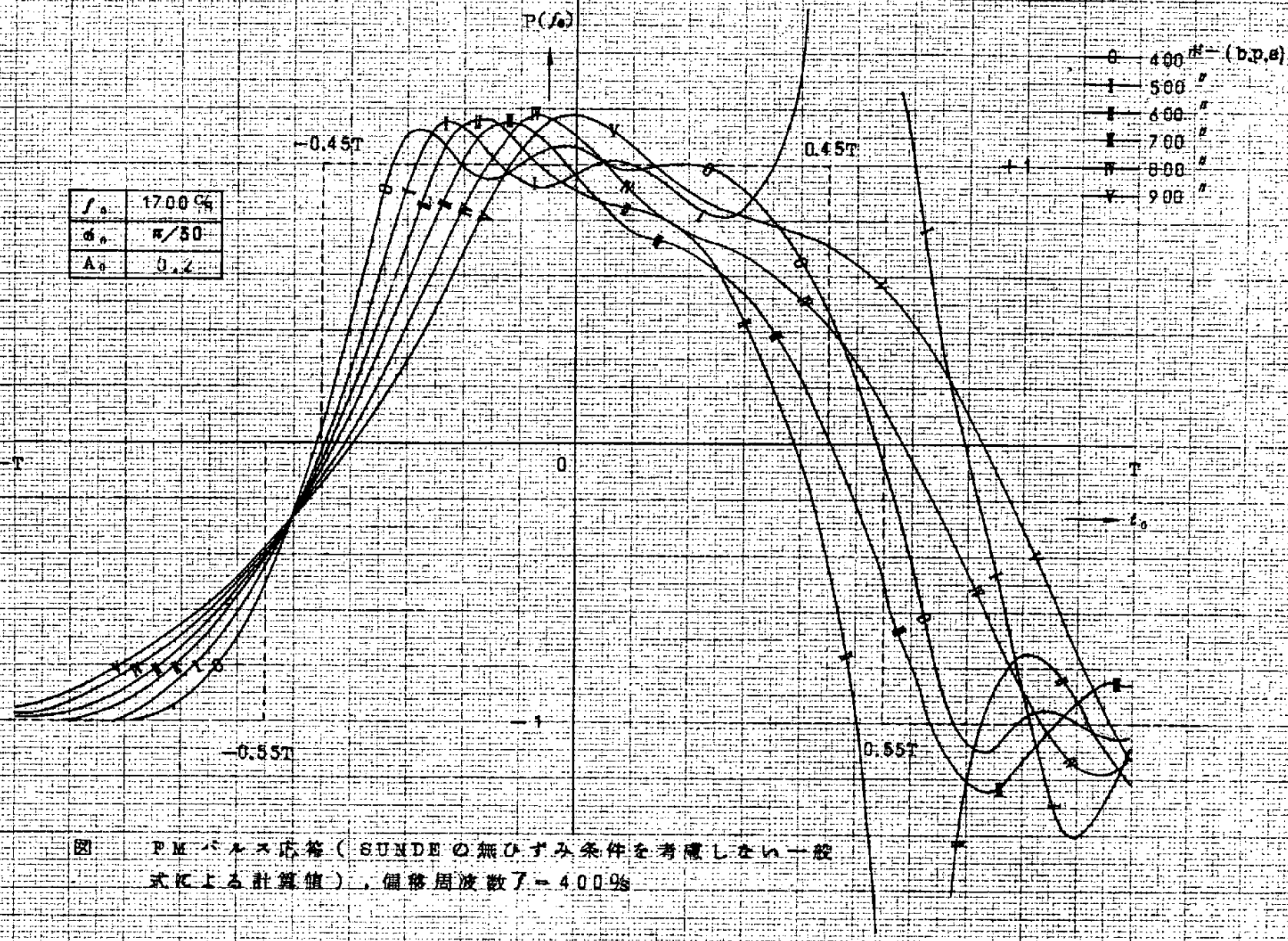
PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

[illegible][illegible]





GLI ASM NTABS,NTABS
 ASSEMBLED BY UNIVAC 1107 SLEUTH II DATED - JANUARY 3, 1964
 THIS ASSEMBLY WAS DONE ON 28 JUL 66 AT 17:19:57

000001	00	000000	000000000003	+3
000002		000001	000000000002	+2
000003		000002	000000000001	+1
000004		000003	000000000002	NTABS* +2
000005		000004	000000000006	+1A'
000006		000005	000000000007	+1B'
000007		000006	000000000010	+1C'
000008		000007	000000000011	+1D'
000009		000010	000000000001	+1
000010		000011	000000000002	+2
000011		000012	000000000012	+1E'
000012		000013	000000000013	+1F'
000013		000014	000000000014	+1G'
000014		000015	000000000016	+DRUM1
		*	00-35 +CC 0	
000015		000016	000000000000	DRUM1 +03000000
000016		000017	0000000010000	+03010000
000017		000020	000000000000	+03000000
000018		000021		RES 4
000019				END

```
0001  *CODE  000037
0000  *DATA  000013
0002  *BLANK 000000
```

0003	EXP
0004	PANDU
0005	PHASES
0006	SH
0007	COS
0010	SGRT
0011	CLOCK
0012	HPDUB
0013	HTO16
0014	HTO25
0015	HTO16
0016	HTO16

0001	000002	IC	0000	000221	100F	0001	000122	1436	0001	000324	1766	0000	000225	200F
0000	000206	201F	0000	000202	202F	0001	000421	6L	0001	000423	7L	0000	R 000153	A
0000	R 000156	ALPHA	0000	R 000216	AM	0000	R 000152	B	0007	R 000000	COS	0000	R 000172	UT
0000	P 000000	E	0003	R 000000	EXP	0000	R 000204	FA10	0000	R 000205	FA11	0000	R 000213	FA12
0000	R 000114	FA13	0000	R 000154	FB	0000	R 000150	FBI	0000	R 000147	FLO	0000	R 000215	FM
0000	R 000153	FR	0000	K 000100	H	0000	R 000161	HI	0000	I 000207	I	0000	I 000160	J
0000	I 000167	J1	0000	I 000170	J2	0000	I 000171	J3	0000	I 000151	L	0000	R 000149	LO
0000	I 000157	K	0000	K 000144	MO	0000	I 000165	N	0000	I 000173	N1	0005	R 000000	PHASES
0000	R 000146	PI	0000	R 000174	PS1	0000	R 000200	P0	0000	K 000202	P1	0000	R 000211	P2
0000	R 000201	QB	0000	K 000203	Q1	0000	R 000212	Q2	0000	K 000220	SIGMA	0006	R 000000	S14
0000	R 000000	SORT	0000	R 000206	SUM	0000	R 000182	T	0000	K 000175	THETA	0000	R 000217	TIME
0000	P 000176	T0	0000	R 000177	T1	0000	K 000210	T2	0000	K 000163	WB	0000	R 000164	W0

00170	1.	C	ACO) GAUSSIAN, PSI(O) PROPORTIONAL TO U**3	MAIN1000
00181	2.		DIMENSION L(100)	MAIN1050
00193	3.		REAL MP(L)	MAIN1100
00194	4.		PI=3.1415927	MAIN1150
00195	5.		1 READ(5,100) FLO,FHI,L,B,FC,FB,ALPHA,M	MAIN1200
00120	6.	100	FORMAT(2F6.0,16,5F6.0,16)	MAIN1250
00121	7.		WRITE(6,120) FLO,FHI,B,FC,FB,ALPHA	MAIN1300
00132	8.	200	FORMAT(10I1, 1X, RANGE (F6.0,10)F6.0, 10), 5X, 5B 2F6.0,3X)	MAIN1350

00132	9.	\$ 9H CARRIER = F6.0/3X, 11H DEVIATION = F6.0/1H, 4H A0 = F6.3/3X,	MAIN1400
00132	10.	\$ 7H ALPHA = F5.1/7H, 6X 2HT0, RA, 6H FM OUT, 12X, 5HP2+02, 6X, 1HP,	MAIN1450
00132	11.	\$ 12X, 1HP, 7H	MAIN1500
00133	12.	H=PI/FLCA(L)*2.*d	MAIN1600
00134	13.	LO=2.*PI*FLO	MAIN1650
00135	14.	HI=2.*PI*FHI	MAIN1700
00136	15.	T=1./U	MAIN1750
00137	16.	WU=2.*PI*FHI	MAIN1800
00140	17.	WU=2.*PI*FLO	MAIN1850
00141	18.	M=4.*H	MAIN1860
00142	19.	DO 4 J=1, 3	MAIN1861
00145	20.	E(J)=1.	MAIN1862
00146	21.	J1=M+J	MAIN1863
00147	22.	E(J1)=1.	MAIN1864
00150	23.	J2=2*M+J	MAIN1865
00151	24.	E(J2)=1.	MAIN1866
00152	25.	J3=3*M+J	MAIN1867
00153	26.	E(J3)=1.	MAIN1868
00154	27.	4 CONTINUE	MAIN1869
00156	28.	E(M+1)=0.	MAIN1870
00157	29.	E(3*M+1)=0.	MAIN1871
00160	30.	E(4*M+1)=-1.	MAIN1872
00161	31.	DT=2.*T/FLOAT(M)	MAIN1900
00162	32.	M=M+1	MAIN1950
00163	33.	MU=EXP(A)	MAIN2000
00164	34.	PSI=ALPHA*PI/9H.	MAIN2050
00165	35.	THETA=(WU-WB)*T/2.*PSI	***2060
00166	36.	TU=-T-LI	MAIN2100
00167	37.	T1=-T	MAIN2150
00170	38.	CALL PANDQ (WU, WB, T, A, ALPHA, TU, LO, HI, M, P0, Q0)	MAIN2200
00171	39.	CALL PANDQ (WU, WB, T, A, ALPHA, T1, LO, HI, M, P1, Q1)	MAIN2250
00172	40.	FA10=PHASES(MU*P0+SIN(THETA-WB*T0), MU*Q0-COS(THETA-WB*T0))	MAIN2260
00173	41.	FA11=PHASES(MU*P1+SIN(THETA-WB*T1), MU*Q1-COS(THETA-WB*T1))	MAIN2270
00174	42.	SUM=0.	MAIN2280
00175	43.	DO 3 I=1, 11	MAIN2300
00200	44.	T2=-T+DT*FLOAT(I)	MAIN2350
00201	45.	CALL PANDQ (WU, WB, T, A, ALPHA, T2, LO, HI, M, P2, Q2)	MAIN2400
00202	46.	FA12=PHASES(MU*P2+SIN(THETA-WB*T2), MU*Q2-COS(THETA-WB*T2))	MAIN2450
00203	47.	IF(FA12-FA10) 8, 6, 5	MAIN2460
00206	48.	8 IF(ABS(FA12)-2.) 6, 6, 5	MAIN2465
00211	49.	5 FA13=FA12+SIGN(2.*PI, FA10)	MAIN2470
00212	50.	GO TO 7	MAIN2480
00213	51.	6 FA13=FA12	MAIN2490
00214	52.	7 FM=(FA13-FA10)/(2.*DT*WB)	MAIN2500
00215	53.	AM=SQRT(P1**2+Q1**2)	MAIN2550
00216	54.	SUM=SUM+(FM-E(I))**2	MAIN2600
00217	55.	TIME=T1/7	MAIN2650
00220	56.	WRITE(6, 201) TIME, FM, AM, P1, Q1, FA11	MAIN2700
00230	57.	T1=T2	MAIN3000
00231	58.	FA10=FA11	MAIN3050
00232	59.	FA11=FA12	MAIN3100
00233	60.	P1=P2	MAIN3110
00234	61.	Q1=Q2	MAIN3120
00235	62.	3 CONTINUE	MAIN3150
00237	63.	SIGMA=SQRT(SUM*DT/(2.*T+DT))	MAIN3160
00240	64.	WRITE(6, 202) SIGMA	
00243	65.	202 FORMAT(1H0, 7HSIGMA = F7.4/7)	
00244	66.	CALL CLOCK	

00205	67.	GO TO 1	MAIN3350
00206	68.	201 FORMAT(1H,2X,F7.4,4X,F9.5,11X,F7.4,2X,F8.4,2X,F8.4,4X,F8.4)	MAIN3400
00207	69.	END	MAIN3500

END OF LISTING. D *DIAGNOSTIC* MESSAGE(S).

PHASE 1	TIME =	1 SEC.
PHASE 2	TIME =	0 SEC.
PHASE 3	TIME =	2 SEC.
PHASE 4	TIME =	0 SEC.
PHASE 5	TIME =	1 SEC.
PHASE 6	TIME =	1 SEC.

TOTAL COMPILATION TIME = 5 SEC

M17 FOR AZIM2F
 COMPILED BY UNIVAC 1107 FORTRAN-IV DATED FEB. 10, 1965 F4003
 THIS COMPIRATION WAS DONE ON 25 JUL 66 AT 17:20:05

SUBROUTINE PANDQ ENTRY POINT 001337

STORAGE USED (BLOCK, NAME, LENGTH)

0001	*CODE	001376
0000	*DATA	000140
0002	*BLANK	000000

EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

0003	EXP
0004	SIN
0005	COS
0006	SQRT
0007	PHASES

STORAGE ASSIGNMENT FOR VARIABLES (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

0001	000475	101L	0001	000522	102L	0001	000512	110L	0001	000434	131L	0001	000612	201L
0001	000637	202L	0001	000627	210L	0001	000732	301L	0001	000757	302L	0001	000747	310L
0001 R	000000	A	0000 R	000037	AMP	0000 R	000044	AMP1	0000 R	000046	AMP2	0000 R	000050	AMP3
0000 R	000017	CC1	0000 R	000020	CC2	0005 R	000000	COS	0003 R	000000	EXP	0000 R	000024	FP
0000 R	000052	FPRES	0000 R	000025	FG	0000 R	000053	FQRES	0000 R	000023	HALFT	0000 R	000043	HR
0000 R	000000	IM1	0000 R	000001	IM2	0000 R	000002	IM3	0000 I	000027	L	0000 I	000026	N
0000 R	000040	PHASE	0007 R	000000	PHASES	0000 R	000045	PHASE1	0000 R	000047	PHASE2	0000 R	000051	PHASE3
0000 P	000005	PI	0001 K	000013	PS1	0000 R	000036	RE1	0000 R	000041	RE2	0000 R	000042	RE3
0001 R	000173	SIM10	0001 R	000241	SIM20	0001 R	000300	SIM30	0004 K	000000	SIN	0006 R	000000	SQRT
0001 R	000027	SRE10	0001 R	000077	SRE20	0001 R	000135	SRE30	0000 R	000007	SSI	0000 R	000012	SS2
0000 R	000010	TH	0000 R	000011	TH1	0000 R	000013	TH2	0000 K	000003	U	0000 R	000004	U
0000 R	000030	U1	0000 R	000031	U2	0000 R	000032	U3	0000 R	000016	X	0000 R	000014	X
0000 R	000021	X	0000 R	000015	X	0000 R	000022	X	0000 R	000006	X	0000 R	000033	X1
0000 R	000034	X2	0000 R	000035	X3									

00101	1.	SUBROUTINE PANDQ (NO*WB*T, AO*ALPHA*TO, LO*HI*H*P*Q)	P:Q 1000
00103	2.	REAL LO, IM1, IM2, IM3	P:Q 1050
00104	3.	A(U)=EXP(-AO*(U/WB)**2)	P:Q 1100
00105	4.	PS1(U)=-ALPHA*PI*(U/WB)**3/90.	****1150
00106	5.	SRE10(X)=SS1*(SIN(X+TH)/(X+TH)+SIN(X+TH2)/(X+TH2))	P:Q 1250
00106	6.	+SS2*(SIN(X-TH)/(X-TH)+SIN(X+TH2)/(X+TH2))	P:Q 1300
00107	7.	SRE20(X)=SS1*(1.0+SIN(X+TH1)/(X+TH1))	P:Q 1350
00107	8.	+SS2*(SIN(X-TH)/(X-TH)+SIN(X+TH2)/(X+TH2))	P:Q 1400
00110	9.	SRE30(X)=SS1*(SIN(X+TH)/(X+TH)+SIN(X+TH1)/(X+TH1))	P:Q 1450
00110	10.	+SS2*(1.0+SIN(X+TH2)/(X+TH2))	P:Q 1500
00111	11.	SIM10(X)=CC1*(SIN(X+TH)/(X+TH)-SIN(X+TH1)/(X+TH1))	P:Q 1550
00111	12.	-CC2*(SIN(X-TH)/(X-TH)-SIN(X+TH2)/(X+TH2))	P:Q 1600
00112	13.	SIM20(X)=CC1*(1.0-SIN(X+TH1)/(X+TH1))	P:Q 1650

00112	14.	\$	-CC2*(SIN(X+TH)/(X+TH)-SIN(X+TH2)/(X+TH2))	P:Q 1700
00113	15.	\$	SIM30(X)=CC1*(SIN(X+TH)/(X+TH)-SIN(X+TH1)/(X+TH1))	P:Q 1750
00113	16.	\$	-CC2*(1.0-SIN(X+TH2)/(X+TH2))	P:Q 1800
00113	17.	C	PROGRAM CONSTANTS	P:Q 1850
00114	18.		PI=3.1415927	P:Q 1200
00115	19.		HALFT=PI/2.	P:Q 1900
00116	20.		TH=WD*HALFT	P:Q 1950
00117	21.		TH1=(WD+WD-WB)*HALFT	P:Q 2000
00120	22.		TH2=(WD+WD-WB)*HALFT	P:Q 2050
00121	23.		SS1=SIN(TH-WD*HALFT)	P:Q 2100
00122	24.		SS2=SIN(TH+WD*HALFT)	P:Q 2150
00123	25.		CC1=COS(TH-WD*HALFT)	P:Q 2200
00124	26.		CC2=COS(TH+WD*HALFT)	P:Q 2250
00124	27.	C	QUALITATIVE	P:Q 2300
00125	28.		FP=0.	P:Q 2350
00126	29.		FQ=0.	P:Q 2400
00127	30.		H=(HI-LO)/(2.*H)	P:Q 2450
00130	31.		DO 1 L=1,H	P:Q 2500
00133	32.		U1=L+2.*H*FLOAT(L-1)	P:Q 2550
00134	33.		U2=U1+H	P:Q 2600
00135	34.		U3=U2+H	P:Q 2650
00136	35.		X1=U1*HALFT	P:Q 2700
00137	36.		X2=U2*HALFT	P:Q 2750
00140	37.		X3=U3*HALFT	P:Q 2800
00141	38.		IF(X1-TH) 101,130,101	P:Q 2850
00144	39.	130	RE1=SRER0(X1)	P:Q 2900
00145	40.		IM1=SIM30(X1)	P:Q 2950
00146	41.		GO TO 102	P:Q 3000
00147	42.	101	IF(X1+TH) 110,120,110	P:Q 3050
00148	43.	120	RE1=SRER0(X1)	P:Q 3100
00143	44.		IM1=SIM20(X1)	P:Q 3150
00144	45.		GO TO 102	P:Q 3200
00146	46.	110	RE1=SRER0(X1)	P:Q 3250
00146	47.		IM1=SIM10(X1)	P:Q 3300
00147	48.	102	AMP=SQRT(RE1**2+IM1**2)*A(U1)	P:Q 3350
00148	49.		PHASE=U1*TO+PHASES(RE1,IM1)+PS1(U1)	P:Q 3400
00141	50.		FP=FP + AMP*COS(PHASE)	P:Q 3450
00142	51.		FQ=FQ + AMP*SIN(PHASE)	P:Q 3500
00142	52.	C		P:Q 3550
00143	53.		IF(X2-TH) 201,230,201	P:Q 3600
00146	54.	230	RE2=SRER0(X2)	P:Q 3650
00147	55.		IM2=SIM30(X2)	P:Q 3700
00170	56.		GO TO 202	P:Q 3750
00171	57.	201	IF(X2+TH) 210,220,210	P:Q 3800
00174	58.	220	RE2=SRER0(X2)	P:Q 3850
00175	59.		IM2=SIM20(X2)	P:Q 3900
00176	60.		GO TO 202	P:Q 3950
00177	61.	210	RE2=SRER0(X2)	P:Q 4000
00200	62.		IM2=SIM10(X2)	P:Q 4050
00201	63.	202	AMP=SQRT(RE2**2+IM2**2)*A(U2)	P:Q 4100
00202	64.		PHASE=U2*TO+PHASES(RE2,IM2)+PS1(U2)	P:Q 4150
00203	65.		FP=FP + 4.*AMP*COS(PHASE)	P:Q 4200
00204	66.		FQ=FQ + 4.*AMP*SIN(PHASE)	P:Q 4250
00204	67.	C		P:Q 4300
00205	68.		IF(X3-TH) 301,330,301	P:Q 4350
00210	69.	330	RE3=SRER0(X3)	P:Q 4400
00211	70.		IM3=SIM30(X3)	P:Q 4450
00212	71.		GO TO 302	P:Q 4500

00213	72.	301	IF(X3+TH) 310,320,310	P:0 4550
00216	73.	320	RE3=SRF20(X3)	P:0 4600
00217	74.		IM3=SIM20(X3)	P:0 4650
00220	75.		GO TO 302	P:0 4700
00221	76.	310	RE3=SRF10(X3)	P:0 4750
00222	77.		IM3=SIM10(X3)	P:0 4800
00223	78.	302	AMP=SQRT(RE3**2+IM3**2)*A(U3)	P:0 4850
00224	79.		PHASE=U3*TO+PHASES(RE3,IM3)+PSI(U3)	P:0 4900
00225	80.		FP=FP + AMP*COS(PHASE)	P:0 4950
00226	81.		FQ=FQ + AMP*SIN(PHASE)	P:0 5000
00227	82.	1	CONTINUE	P:0 5050
00231	83.		FP=FP*H/3.	P:0 5100
00232	84.		FQ=FQ*H/3.	P:0 5150
00233	85.		UR=(HI-2.*H*FLOAT(N)-LO)/2.	P:0 5200
00234	86.		UI=2.*H*FLOAT(N)+LO	P:0 5250
00235	87.		U2=U1+UR	P:0 5300
00236	88.		U3=U1	P:0 5350
00237	89.		X1=U1*HALFT	P:0 5400
00240	90.		X2=U2*HALFT	P:0 5450
00241	91.		X3=U3*HALFT	P:0 5500
00242	92.		RE1=SRF10(X1)	P:0 5550
00243	93.		IM1=SIM10(X1)	P:0 5600
00244	94.		RE2=SRF10(X2)	P:0 5650
00245	95.		IM2=SIM10(X2)	P:0 5700
00246	96.		RE3=SRF10(X3)	P:0 5750
00247	97.		IM3=SIM10(X3)	P:0 5800
00248	98.		AMP1=SQRT(RE1**2+IM1**2)*A(U1)	P:0 5850
00249	99.		PHASE1=U1*TO+PHASES(RE1,IM1)+PSI(U1)	P:0 5900
00252	100.		AMP2=SQRT(RE2**2+IM2**2)*A(U2)	P:0 5950
00253	101.		PHASE2=U2*TO+PHASES(RE2,IM2)+PSI(U2)	P:0 6000
00254	102.		AMP3=SQRT(RE3**2+IM3**2)*A(U3)	P:0 6050
00255	103.		PHASE3=U3*TO+PHASES(RE3,IM3)+PSI(U3)	P:0 6100
00256	104.		FPRES= AMP1*COS(PHASE1)+4.*AMP2*COS(PHASE2)+AMP3*COS(PHASE3)	P:0 6150
00257	105.		FQRES= AMP1*SIN(PHASE1)+4.*AMP2*SIN(PHASE2)+AMP3*SIN(PHASE3)	P:0 6200
00260	106.		FPRES=FPRES*HR/3.	P:0 6250
00261	107.		FQRES=FQRES*HR/3.	P:0 6300
00261	108.	C		P:0 6350
00262	109.		RE=(FP+FPRES)*HALFT/PI	P:0 6400
00263	110.		Q=(FQ+FQRES)*HALFT/PI	P:0 6450
00264	111.		RETURN	P:0 6500
00265	112.		END	P:0 6550

END OF LISTING. D *DIAGNOSTIC* MESSAGE(S).

PHASE 1 TIME = 2 SEC.
 PHASE 2 TIME = 0 SEC.
 PHASE 3 TIME = 2 SEC.
 PHASE 4 TIME = 0 SEC.
 PHASE 5 TIME = 3 SEC.
 PHASE 6 TIME = 2 SEC.

TOTAL COMPILATION TIME = 9 SEC

RIT FOR AZ103F
 COMPILE BY UNITVAC 1107 FORTRAN-IV DATED FEB. 10, 1965 F4003
 THIS COMPILE WAS DONE ON 28 JUL 66 AT 17:20:15

FUNCTION PHASES ENTRY POINT 000034

STORAGE USED (BLOCK, NAME, LENGTH)

0001 *CODE 000042
 0000 *DATA 000012
 0002 *BLANK 000000

EXTERNAL REFERENCES (BLOCK, NAME)

0003 ATAN

STORAGE ASSIGNMENT FOR VARIABLES (BLOCK, TYPE, RELATIVE LOCATION, NAME)

0001 000012 3L 0001 000015 4L 0003 R 000000 ATAN 0000 R 000000 PHASES 0000 R 000001 PI

00101	1.	FUNCTION PHASES (X,Y)	ATAN 000
00103	2.	PI=3.1415927	ATAN 050
00104	3.	IF(Y) 4,1,4	ATAN 100
00107	4.	1 IF(X) 5,2,2	ATAN 150
00112	5.	2 PHASES=0.	ATAN 200
00113	6.	RETURN	ATAN 250
00114	7.	3 PHASES=PI	ATAN 300
00115	8.	RETURN	ATAN 350
00116	9.	4 PHASES=SIGN(PI,Y)/2.-ATAN(X/Y)	ATAN 400
00117	10.	RETURN	ATAN 450
00120	11.	END	ATAN 500

END OF LISTING. 0 *DIAGNOSTIC* MESSAGE(S).

PHASE 1 TIME = 0 SEC.
 PHASE 2 TIME = 0 SEC.
 PHASE 3 TIME = 1 SEC.
 PHASE 4 TIME = 0 SEC.
 PHASE 5 TIME = 0 SEC.
 PHASE 6 TIME = 0 SEC.

TOTAL COMPILE TIME = 1 SEC

Q XQT AZIMIF

STARTING ADDRESS 010000

CORE LIMITS 010000 016147 100000 101246

AZIMIF /CODE

0 100000-100312
1 010000-010536

NOAUS% /CODE

1 010537-010601

ROUTE /CODE

1 010602-011717
2 100313-100435

NTAB% /CODE

0 100436-100462

NETVS /CODE

1 011720-011743

HEMT% /CODE

0 100463-100463
1 011744-012737
2 100464-100704

NTERS /CODE

1 012740-013004
2 100705-100706

NTNPTS /CODE

1 013005-013755
2 100707-100763

CLOCK /CODE

1 013756-013774

ETODS /CODE

0 100764-100764
1 013775-014030

SECT /CODE

1 014031-014073
2 100765-100772

HEKRS /CODE

0 100773-100774
1 014074-014304

STHCOS/CODE

1 014305-014361
2 100775-101012

A7IM3F/CODE

0 101013-101024
1 014362-014423

ATAN /CODE

1 014424-014506
2 101025-101066

A7IM2F/CODE

0 101067-101226
1 014507-014604

EYP /CODE

1 014605-014647
2 101227-101246

END OF ALLOCATION

RANGE (-1500., 2000.) P = 300. CARRIER = 1500. DEVIATION = 400.
 AO = .200 ALPHA = 3.0

TO	FM OUT	P2+42	P	Q	
-1.0000	-1.00054	.0004	.0004	.0002	-.4184
-.9500	-1.00150	.0004	.0002	-.0003	-.8378
-.9000	-1.00131	.0007	-.0006	-.0003	-1.2574
-.8500	-1.00162	.0010	-.0009	.0005	-1.6767
-.8000	-1.00381	.0018	-.0018	.0005	-2.0966
-.7500	-1.00365	.0062	-.0062	-.0000	-2.5176
-.7000	-.98512	.0180	-.0180	.0006	-2.9374
-.6500	-.91855	.0445	-.0445	.0023	-2.9402
-.6000	-.77766	.1012	-.1011	.0031	-2.5763
-.5500	-.55586	.2125	-.2125	.0029	-2.2887
-.5000	-.25140	.4040	-.4040	.0029	-2.1106
-.4500	.16038	.6864	-.6864	.0014	-2.0780
-.4000	.69440	1.0366	-1.0366	-.0031	-2.2500
-.3500	1.07502	1.3766	-1.3766	-.0070	-2.6640
-.3000	1.06365	1.5767	-1.5767	-.0088	-3.1326
-.2500	.95033	1.5088	-1.5088	-.0008	-2.7281
-.2000	.99307	1.1292	-1.1292	.0037	-2.3364
-.1500	1.05695	.5149	-.5148	.0025	-1.8962
-.1000	1.02140	.1837	.1837	-.0005	-1.4510
-.0500	.97706	.8263	.8263	-.0015	-1.0402
.0000	.99097	1.3200	1.3200	-.0007	-.6324
.0500	1.00516	1.5975	1.5975	.0004	-.2100
.1000	.99623	1.6045	1.6045	.0008	.2097
.1500	.99263	1.3289	1.3289	-.0008	.6246
.2000	.98573	.8227	.8227	-.0029	1.0412
.2500	.96516	.1835	.1835	-.0049	1.4504
.3000	.96230	.4731	-.4730	.0108	1.8498
.3500	1.02433	1.0256	-1.0253	-.0249	2.2566
.4000	1.21230	1.3642	-1.3634	-.0480	2.7079
.4500	1.46104	1.4196	-1.4174	-.0787	-3.0110
.5000	1.38422	1.1932	-1.1880	-.1114	-2.3512
.5500	.87703	.7726	-.7612	-.1521	-1.8513
.6000	.27806	.3182	-.2942	-.1213	-1.6165
.6500	-.34843	.0841	.0434	-.0720	-1.8184
.7000	-1.02755	.1587	.1586	-.0052	-1.9084
.7500	-1.27110	.1014	.0940	.0380	-2.4792
.8000	-1.02313	.0344	-.0126	.0320	-2.9733
.8500	-.91012	.0483	-.0482	-.0027	-2.9468
.9000	-1.03748	.0239	-.0130	-.0200	-2.5424
.9500	-1.04924	.0193	.0186	-.0052	-2.0777
1.0000	-.96683	.0137	.0090	.0103	-1.6634

SIGMA = .4676

REAL TIME CLOCK INTERROGATED AT 17:20:55

RANGE (-1500., 2000.) B = 400. CARRIER = 1500. DEVIATION = 400.
 AU = .200 ALPHA = 3.0

V TO	FM OUT	P2+42	P	Q	
-1.0000	-1.00121	.0008	.0004	-.0000	.8892
-.9500	-1.00204	.0011	-.0004	-.0010	.5747
-.9000	-1.00405	.0019	.0010	-.0016	.2596
-.8500	-1.00540	.0046	.0032	-.0033	-.0562
-.8000	-1.00039	.0109	.0075	-.0078	-.3721
-.7500	-.97808	.0226	.0153	-.0169	-.6848
-.7000	-.92412	.0445	.0298	-.0330	-.9866
-.6500	-.82681	.0830	.0565	-.0607	-1.2654
-.6000	-.68250	.1484	.1027	-.1071	-1.5361
-.5500	-.49394	.2522	.1762	-.1804	-1.6943
-.5000	-.25949	.4039	.2836	-.2877	-1.8465
-.4500	.03704	.6076	.4283	-.4311	-1.8973
-.4000	.41898	.8565	.6060	-.6052	-1.7932
-.3500	.84377	1.1271	.8001	-.7938	-1.5941
-.3000	1.11830	1.3767	.9788	-.9681	-1.2631
-.2500	1.30983	1.5475	1.0996	-1.0889	-.8914
-.2000	.97832	1.5816	1.1213	-1.1155	-.5657
-.1500	.93195	1.4421	1.0192	-1.0201	-.2767
-.1000	.99194	1.1292	.7959	-.8010	.0148
-.0500	1.06188	.6825	.4802	-.4880	.3465
.0000	1.05939	.1658	.1164	-.1181	.6870
.0500	1.00569	.3552	-.2506	.2518	1.0122
.1000	.97579	.6290	-.5852	.5872	1.3189
.1500	.99018	1.2203	-.8624	.8634	1.6253
.2000	1.00512	1.5023	-1.0628	1.0618	1.9412
.2500	.97837	1.6522	-1.1697	1.1668	2.2568
.3000	.90898	1.6556	-1.1726	1.1687	2.5559
.3500	.80596	1.5168	-1.0745	1.0706	2.8279
.4000	.66213	1.2640	-.8955	.8921	3.0623
.4500	.46975	.9437	-.6092	.6655	-3.0392
.5000	.23085	.6090	-.4329	.4283	-2.9257
.5500	-.05887	.3092	-.2204	.2168	-2.8942
.6000	-.41308	.0821	-.0576	.0585	-2.9627
.6500	-.74722	.0525	-.0405	-.0334	3.1298
.7000	-1.06196	.0979	.0742	-.0632	2.8196
.7500	-1.09148	.0781	.0601	-.0849	2.4622
.8000	-.99369	.0310	.0249	-.0195	2.1338
.8500	-.94193	.0082	-.0060	.0055	1.8379
.9000	-.97621	.0237	-.0189	.0144	1.5420
.9500	-1.03348	.0170	-.0143	.0093	1.2248
1.0000	-1.04526	.0025	-.0025	.0002	.8926

SIGMA = .2953

REAL TIME CLOCK INTERROGATED AT 17:21:17

RANGE (-1500., 2000.) H = 500. CARRIER = 1500. DEVIATION = 400.
 A0 = .200. ALPHA = 3.0

TO	FM OUT	P2+Q2	P	Q	
-1.0000	-1.00434	.0020	-.0019	.0004	-2.0967
-.9500	-1.00586	.0040	-.0039	.0002	-2.3493
-.9000	-1.00433	.0078	-.0078	.0002	-2.6021
-.8500	-.99560	.0147	-.0147	.0006	-2.8541
-.8000	-.97208	.0260	-.0260	.0013	-3.1026
-.7500	-.92637	.0444	-.0444	.0021	-2.9404
-.7000	-.85286	.0735	-.0735	.0027	-2.7150
-.6500	-.74894	.1169	-.1169	.0030	-2.5117
-.6000	-.61532	.1847	-.1847	.0032	-2.3385
-.5500	-.45383	.2784	-.2784	.0032	-2.2025
-.5000	-.26287	.4039	-.4038	.0030	-2.1104
-.4500	-.03331	.5628	-.5628	.0022	-2.0703
-.4000	.25006	.7525	-.7525	.0005	-2.0936
-.3500	.54021	.9642	-.9642	-.0022	-2.1960
-.3000	.93074	1.1807	-1.1806	-.0051	-2.3903
-.2500	1.13997	1.3776	-1.3770	-.0073	-2.6039
-.2000	1.14056	1.5230	-1.5230	-.0076	-2.9633
-.1500	1.02306	1.5881	-1.5881	-.0055	-3.0460
-.1000	.92995	1.5491	-1.5491	-.0017	-2.8056
-.0500	.91914	1.3960	-1.3960	.0024	-2.8786
-.0000	.96874	1.1357	-1.1357	.0056	-2.3436
.0500	1.02035	.7913	-.7913	.0073	-2.0916
.1000	1.02185	.3967	-.3966	.0089	-1.8307
.1500	.96967	.0161	.0113	.0114	-1.5780
.2000	.90963	.3992	.3989	.0167	-1.3433
.2500	.89799	.7398	.7394	.0259	-1.1208
.3000	.97740	1.0134	1.0126	.0398	-.8919
.3500	1.18532	1.2040	1.2025	.0584	-.6295
.4000	1.54633	1.2984	1.2959	.0804	-.2961
.4500	1.93244	1.2685	1.2444	.1037	.1478
.5000	1.97053	1.1760	1.1694	.1249	.6752
.5500	1.53568	.9761	.9660	.1400	1.1383
.6000	.96450	.7191	.7043	.1450	1.4471
.6500	.50240	.4464	.4249	.1368	1.6231
.7000	.13229	.2056	.1712	.1139	1.6997
.7500	-.22915	.0806	-.0209	.0778	1.6896
.8000	-.65002	.1356	-.1312	.0343	1.5845
.8500	-1.10387	.1598	-.1596	-.0075	1.3629
.9000	-1.37675	.1305	-.1252	-.0369	1.0296
.9500	-1.29984	.0754	-.0593	-.0464	.6708
1.0000	-1.04555	.0359	.0049	-.0356	.3763

SIGMA = .7384

REAL TIME CLOCK INTERROGATED AT 17:21:35

RANGE (-1500..2000.) B = 600. CARRIER = 1500. DEVIATION = 400.
AD = .200 ALPHA = 3.0

TO	FM OUT	P2+Q2	P	Q	
-1.0000	-1.00553	.0063	.0002	.0063	2.1944
-.9500	-1.00145	.0109	.0003	.0109	1.9840
-.9000	-.99640	.0179	.0007	.0179	1.7749
-.8500	-.991760	.0285	.0014	.0284	1.5691
-.8000	-.98815	.0443	.0021	.0443	1.3696
-.7500	-.986871	.0677	.0027	.0676	1.1803
-.7000	-.98813	.1014	.0030	.1013	1.0057
-.6500	-.986890	.1486	.0031	.1486	.8502
-.6000	-.986009	.2127	.0031	.2127	.7180
-.5500	-.98602	.2970	.0031	.2970	.6131
-.5000	-.986482	.4038	.0030	.4038	.5395
-.4500	-.98699	.5341	.0025	.5341	.5022
-.4000	-.98694	.6865	.0013	.6865	.5073
-.3500	-.98690	.8569	.0007	.8569	.5635
-.3000	-.98690	1.0376	.0031	1.0376	.6802
-.2500	-.98690	1.2168	.0053	1.2168	.8614
-.2000	1.14998	1.3792	.0067	1.3792	1.0937
-.1500	1.15322	1.5074	.0065	1.5074	1.3431
-.1000	1.05070	1.5838	.0046	1.5838	1.5767
-.0500	.93735	1.5937	.0008	1.5937	1.7832
.0000	.86809	1.5286	.0043	1.5286	1.9694
.0500	.84712	1.3878	.0101	1.3878	2.1466
.1000	.84987	1.1794	.0161	1.1793	2.3242
.1500	.84119	.9195	.0224	.9142	2.5028
.2000	.79146	.6295	.0296	.6288	2.6766
.2500	.68978	.3349	.0384	.3317	2.8344
.3000	.54314	.0709	.0497	.0505	2.9655
.3500	.35879	.2061	.0639	-.1959	3.0619
.4000	.11672	.4013	.0804	-.3931	3.1158
.4500	-.28735	.5410	.0979	-.5321	3.1108
.5000	-1.23896	.6190	.1143	-.6083	2.9954
.5500	-3.01483	.6347	.1271	-.6216	2.5918
.6000	-3.32803	.5921	.1337	-.5769	1.7326
.6500	-1.75944	.5006	.1314	-.4830	1.1378
.7000	-.72213	.3746	.1187	-.3553	.9956
.7500	-.42001	.2335	.0956	-.2130	.8953
.8000	-.37988	.1011	.0646	-.0778	.8196
.8500	-.46646	.0429	.0300	.0307	.7361
.9000	-.65152	.0989	.0022	.0989	.6234
.9500	-.90475	.1255	.0255	.1227	.4632
1.0000	-1.16037	.1166	.0390	.1078	.2444

SIGMA = .6850

REAL TIME CLOCK INTERROGATED AT 17:21:52

RANGE (-1500., 2000.) H = 1200. CARRIER = 1500. DEVIATION = 400.
 AQ = .200 ALPHA = 3.0

T0	FM OUT	P2+Q2	P	Q	
-1.0000	-.87316	.0069	-.0484	-.0462	-2.7453
-.9500	-.83762	.0026	-.0598	-.0569	-2.8355
-.9000	-.79677	.1011	-.0734	-.0695	-2.9212
-.8500	-.75073	.1227	-.0892	-.0842	-3.0024
-.8000	-.69969	.1478	-.1076	-.1014	-3.0784
-.7500	-.64384	.1768	-.1267	-.1212	-3.1343
-.7000	-.58335	.2101	-.1529	-.1441	-3.0699
-.6500	-.51836	.2480	-.1602	-.1704	-3.0121
-.6000	-.44886	.2910	-.2111	-.2003	-2.9613
-.5500	-.37484	.3392	-.2456	-.2340	-2.9181
-.5000	-.29600	.3930	-.2840	-.2717	-2.8828
-.4500	-.21200	.4523	-.3263	-.3132	-2.8561
-.4000	-.12233	.5170	-.3725	-.3580	-2.8384
-.3500	-.02634	.5869	-.4224	-.4074	-2.8305
-.3000	.07659	.6613	-.4758	-.4593	-2.8329
-.2500	.18701	.7394	-.5320	-.5135	-2.8465
-.2000	.30509	.8202	-.5906	-.5692	-2.8721
-.1500	.43031	.9023	-.6504	-.6254	-2.9104
-.1000	.56090	.9842	-.7106	-.6810	-2.9622
-.0500	.69382	1.0641	-.7698	-.7346	-3.0279
.0000	.82376	1.1349	-.8267	-.7848	-3.1075
.0500	.94473	1.2096	-.8798	-.8302	-3.0828
.1000	1.04845	1.2710	-.9274	-.8691	-2.9779
.1500	1.13130	1.3218	-.9681	-.9000	-2.8632
.2000	1.19143	1.3600	-1.0003	-.9215	-2.7410
.2500	1.23226	1.3837	-1.0226	-.9322	-2.6136
.3000	1.26129	1.3913	-1.0338	-.9310	-2.4829
.3500	1.28792	1.3814	-1.0329	-.9172	-2.3495
.4000	1.32058	1.3533	-1.0192	-.8903	-2.2131
.4500	1.36378	1.3067	-.9922	-.8503	-2.0729
.5000	1.41546	1.2421	-.9522	-.7975	-1.9275
.5500	1.46516	1.1604	-.8995	-.7331	-1.7764
.6000	1.49441	1.0634	-.8351	-.6583	-1.6206
.6500	1.48132	.9533	-.7603	-.5751	-1.4634
.7000	1.40939	.8331	-.6767	-.4859	-1.3104
.7500	1.27550	.7063	-.5866	-.3933	-1.1683
.8000	1.09106	.5768	-.4924	-.3003	-1.0433
.8500	.87521	.4487	-.3967	-.2097	-.9396
.9000	.64618	.3269	-.3022	-.1246	-.8600
.9500	.41601	.2168	-.2116	-.0476	-.8044
1.0000	.18997	.1288	-.1274	.0190	-.7726

SIGMA = 1.1469

REAL TIME CLOCK INTERROGATED AT 17:22:01

EXECUTION TERMINATED BY AN ATTEMPT TO READ THRU AN END OF FILE
ABOVE FAULT AT INTERNAL SEQUENCE NUMBER 00105

28 JUL 66 17:22:01 IDENT NRU ACCOUNT KUBOZ CARDS IN 223 CARDS OUT 0 PAGES 18 ELAPSED TIME 0 2 5

-39-

UNIVAC 1107 32K85.0A-NRU FEB. 15 1966

3 線型計算のプログラム

3.1 ベクトルの内積

2本の n 次元ベクトル $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ をカード上から読みこみ, その内積 $a \cdot b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ を計算してその結果をプリントするプログラム。

ただし, この場合 n は第1枚目のカードにパンチしてあり, 2枚目以下に1枚のカードにつき, a, b の対応する一組の要素がパンチされているものとする。(図3-1)

3.2 行列の積

m 行 n 列の行列Aと n 行 ℓ 列の行列Bの積 AB を求めて, その結果をふつうの行列の形にプリントするプログラム。

ただし, m, n, ℓ はともに10以下とし, これらはデータとして読みこませる。

また行列A, Bはそれぞれカード上に列ごとにパンチされているものとする。(図3-2)

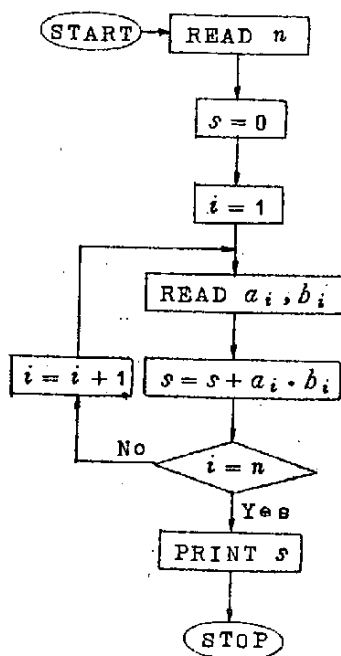


図3-1 内積

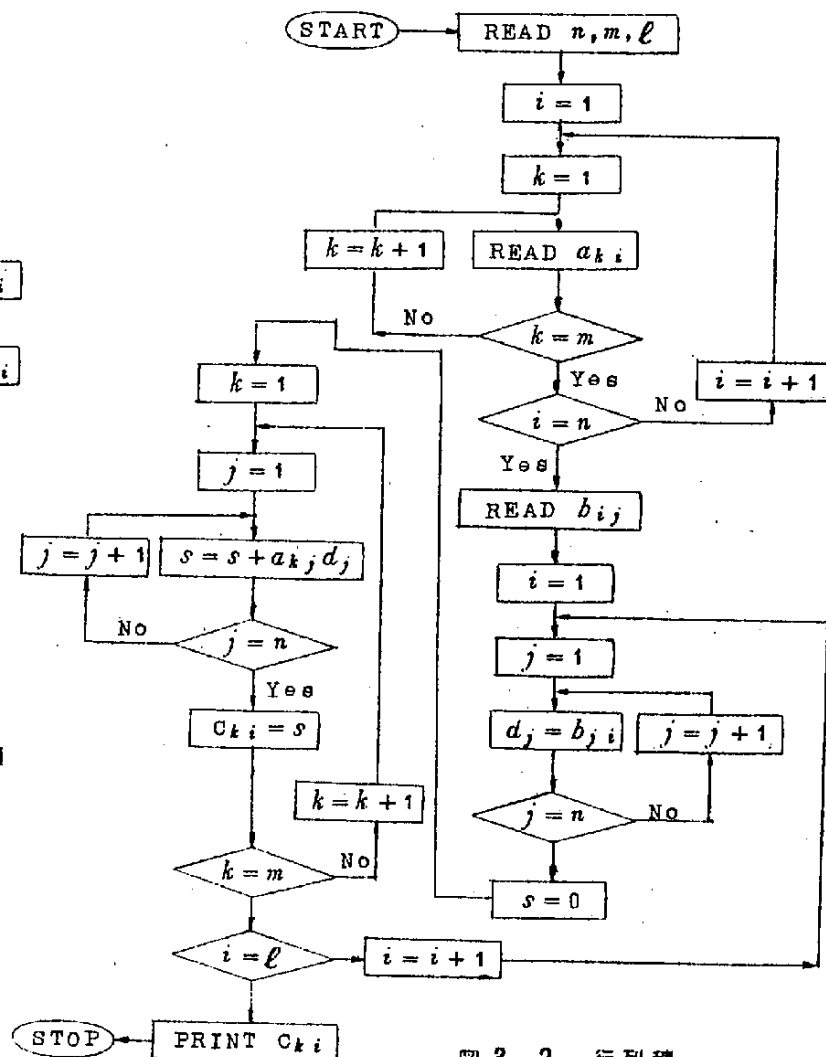


図3-2 行列積

3.3 対称行列の固有値および固有ベクトル

対称的な n 次正方行列 A には

$$A u_i = \lambda_i u_i$$

をみたす n 個の実固有値 λ_i および固有ベクトル u_i が存在する。ここでは便宜上 $|\lambda_1| > |\lambda_2| > \dots > |\lambda_n|$ が成立するものとしよう。

これらの固有値および固有ベクトルを求める方法として一般にベキ乗法がよく知られている。 λ_1 および u_1 を求めるには次のようにする。まず適当な初期ベクトル x_0 をとり、これに A をかけて x_1 を求め、それにさらに A をかける、という操作を十分な回数くり返して、 x_n があらかじめ決めた誤差の限界内で、ある数 λ によって $x_n = \lambda x_{n-1}$ と書けるときに、この λ を λ_1 とし、 x_{n-1} を u_1 とするのである。 λ_2 以下の固有値、固有ベクトルを求めるには各々の固有ベクトルの直交性を利用する。いま u_1 の第 1 の成分が絶対値最大であり、しかも 1 に規格化されているとする。(これは説明の便宜のためにおく仮定で実際の計算では不要である) 行列 A の第 1 列を a_1 とし、新しい行列 A_1 を次のように定義する。

$$A_1 = A - a_1 u_1^T$$

この行列 A_1 は固有値 $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ 、固有ベクトル $u_2, u_3, \dots, u_n$ をもつことが証明されるので、これに対し上の方法で最大固有値を求めてやれば λ_2 が求まる。以上の作業をくり返せば、

すべての固有値、固有ベクトルが求まることになる。この手順をフローチャートにしたものが、図 3-3 である。

プログラムは、ALGOL と FORTRAN の両方で組んでみた。

3.4 連立 1 次方程式

A を m 次正方行列、 x を m 次元ベクトル、 b_k ($k=1, \dots, n$) を m 次元ベクトルとしたときに

$$Ax = b_k$$

$$(k=1, \dots, n)$$

を Gauss-Jordan の

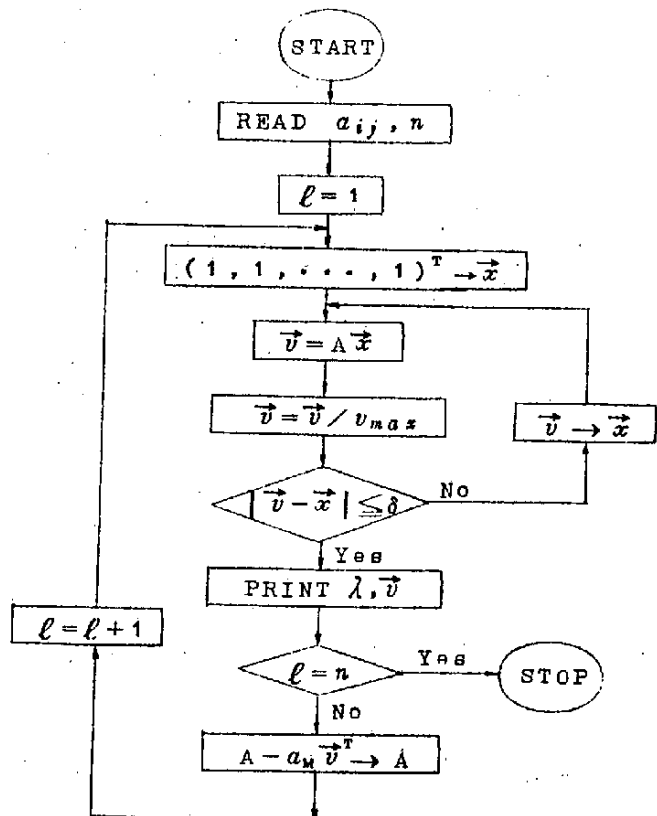


図 3-3 固有値、固有ベクトル

消去法によって一挙に解くプログラムを ALGOL, FORTRAN によって書いてみよう。
(図 3-4)

普通に消去を行なっていくと枢軸要素がゼロになるとこれで割算を行なうことはできなくなる。この場合例えば第 k 回目の掃き出しを行なおうとした場合、 k 行 k 列の値が 0 となるときには、 k 行 k 列から $k+1$ 行 k 列、 $k+2$ 行 k 列...と見ていってこの中から 0 でないものを探し、 r 行 k 列にみつかったとすると、 r 行と k 行とを全部入れかえて計算してゆけば解決がつく。このようにしても 0 とならないものがみつからないときには、不定または不能の場合であるので計算を停止する。また k 列で k 行以下の要素のうち一番絶対値の大きなものか、非常にゼロに近いときも、異常であるとみなして計算をストップさせた方が賢明である。このプログラムでは、可能なかぎりの行の交換によって最も絶対値の大きいものを枢軸要素にえらび、これによって掃き出しを行なうようにし、これが、あらかじめきめた正数 ϵ 以下になったときには計算をストップするようにプログラムしてある。

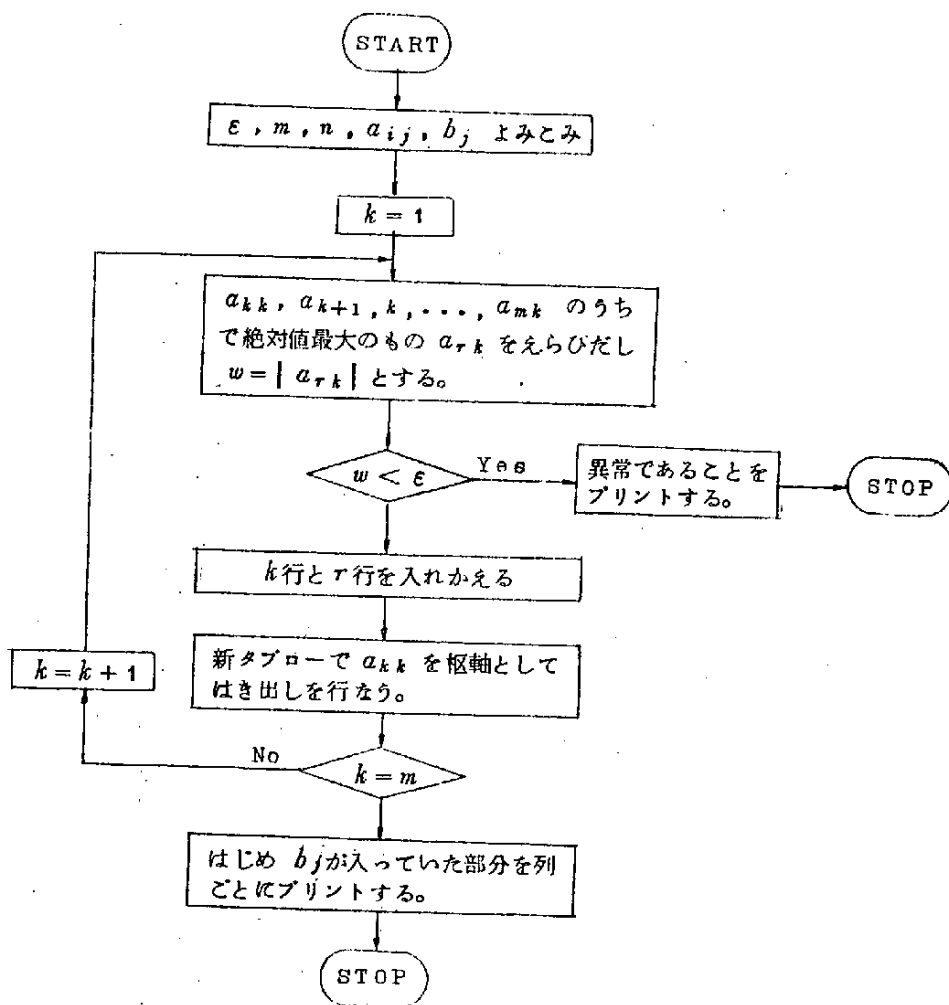


図 3-4 連立一次方程式

4. 微分方程式

4.1 Runge-Kutta-Gill 法

微分方程式

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}) \quad (i=1, 2, \dots, m-1) \dots\dots\dots (1)$$

初期条件: $x=x_0$ において $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}$ の値を与えられている。この問題を Runge Kutta Gill 法の公式を用いてとくプログラムを考えよう。

解法の公式:

x を x_0 からきざみ巾 h で増してゆく。ある x に対する y_i の値を y_{i0} として 次の計算により求めた y_{i4} を $x+h$ に対する y の値とする。

$$\left. \begin{aligned} k_{i0} &= h f_i(y_{00}, y_{10}, y_{20}, \dots, y_{m-1,0}) & r_{i1} &= 1/2(k_{i0} - 2q_{i0}) \\ y_{i1} &= y_{i0} + r_{i1}, & q_{i1} &= q_{i0} + 3r_{i1} - (1/2)k_{i0} \\ k_{i1} &= h f_i(y_{01}, y_{11}, y_{21}, \dots, y_{m-1,1}) & r_{i2} &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(k_{i1} - q_{i1}) \\ y_{i2} &= y_{i1} + r_{i2}, & q_{i2} &= q_{i1} + 3r_{i2} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(k_{i2} - q_{i2}) \\ k_{i2} &= h f_i(y_{02}, y_{12}, y_{22}, \dots, y_{m-1,2}) & r_{i3} &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)(k_{i2} - q_{i2}) \\ y_{i3} &= y_{i2} + r_{i3}, & q_{i3} &= q_{i2} + 3r_{i3} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)k_{i2} \\ k_{i3} &= h f_i(y_{03}, y_{13}, y_{23}, \dots, y_{m-1,3}) & r_{i4} &= \frac{1}{6}(k_{i3} - 2q_{i3}) \\ y_{i4} &= y_{i3} + r_{i4} & q_{i4} &= q_{i3} + 3r_{i4} - (1/2)k_{i3} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$(i=0, 1, \dots, m-1)$

上の公式では独立変数 x を y_0 と表わしている。従って f_0 はつねに 1 に等しい。また q_{i0} は出発点 x_0 ではすべて 0 とおき、あとは一つ前のステップでの q_{i4} をそれぞれ新しい q_{i0} として上の公式を適用する。

以上の公式を

$$\frac{dy}{dx} = f_1 = z, \quad \frac{dz}{dx} = f_2 = xy + z \dots\dots\dots (3)$$

$$x=0 \text{ で } y=0, z=1$$

に適用したのがプログラム 4-1 である。

4.2 楕円型偏微分方程式の数値解法

1. は し が き

筆者はここ暫くの間、偏微分方程式、特に楕円型偏微分方程式の境界値問題の数値解法の理論及び実際の仕事にたずさわって来た。ここでは、その際のいくつかの経験をもとにして少しばかりお話して読者諸賢の参考に供したいと思う。

解析解が容易に求まらない、線型の微分方程式の境界値問題を、電子計算機を使って解く際に、現実我々が良く用いる方法の中で、方程式の成立する領域に適当な格子点を設けて、各格子点において微分方程式及び境界条件を、格子点での関数値を用いて差分式として近似し、その結果得られる連立一次方程式を解くのが最もオーソドックスなものであろう。偏微分方程式の場合には、常微分方程式の場合と比べて、一つには計算機に要求される記憶容量が、格子間隔をせまくして、差分式の近似度を高めてゆく毎に指数的に増加するという事、更には計算時間もそれに輪をかけて増大するという困難さがある。またその結果として、現在までに得られている実際上の経験も多くなく、理論的な研究に到ってはまだ始まったばかりといって良く、実際においてはケースバイケースで処理してゆかねばならない。

さて楕円型偏微分方程式の境界値問題を差分近似して解くに当たって問題とする点は、大きく分けて次の2つの点にしばられる。その一つは、格子間隔を狭くしていった時に差分式の解が、微分方程式の真の解に収束してゆく為にはどのような近似式を用いれば良いかという、いわゆる打ち切り誤差の問題であり、いま一つは、未知数の個数の多い連立一次方程式を、いかに効率良く解くかという事である。以下では主にこの2つの点を中心として話を進める事とする。

2. ダムの振動問題

図1のように、近似的に谷は放物線で、ダム壁面は円筒面の一部として表わされ、上流に向かって一様なアーチダムを考えよう。地震などにより、このダム壁が時間に関して $\sin \nu t$ で表わされる微小な振動を始めるものとする。この振動に伴って、池の中の水も振動を起こす。このとき、ダム壁面には水の静水圧のほかに、動水圧も加わる事になる。地震の多い我が国において、この動水圧の大きさを評価する事は意味があるだろう。我々はこの為に、図1に示したような座標軸を定め、水の運動が渦なしである事から、速度ポテンシャル関数 $f(x, y, z, t)$ を導入して計算を進めてゆくと、池の中での水の運動は、

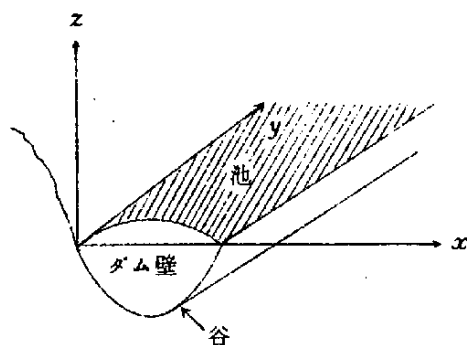


図 1

$$\Delta f = (w/gk) \partial^2 f / \partial t^2 \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

という波動方程式に従う事が分る。ここで Δ は三次元ラプラス演算子、 g は重力加速度、 w は単位体積あたりの重量、 k は水の体弾性率を示す。ダム壁が $\sin \nu t$ で振動する事から、定常的な場合の解として

$$f(x, y, z, t) = F(x, y, z) \sin \nu t \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

という形を仮定して、時間の項を変数分離してやると、結局、

$$\Delta F = -(\nu^2/gk) F \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

というヘルムホルツ方程式が得られる。

これに課せられる境界条件は次のようになる。ダムの変位の速度が入力として与えられるので

$$\partial F / \partial n = \nu(x, y, z) \quad (\text{ダムの面上}) \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

となる。ここで n は池の領域から見て外向きの法線を表わすものとする。側壁は全然振動しない事から

$$\partial F / \partial n = 0 \quad (\text{側壁}) \quad \dots\dots\dots (2.5)$$

が得られ、更に自由表面が一つの等圧面を形成する事、及び池の深さに対して、波の高さが無視出来る程小さい事から、

$$(\nu^2/g) F - \partial F / \partial z = 0 \quad (z=0) \quad \dots\dots\dots (2.6)$$

が導かれる。又、この場合、解としては理論的には有限の速度をもって無限遠方まで伝播する波も存在し得るが、これは現実のダムをモデル化した為に現われる項であって、実験的には上流に向かって谷の幅の2～3倍のところでは水がほとんど振動しない事から、

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y, z) = 0 \quad \dots\dots\dots (2.7)$$

と置いて良い。さてこのような条件の下で F が求まると、動水圧 σ は

$$\sigma(x, y, z, t) = \left(\frac{w\nu}{g} F - \frac{w}{\nu} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \right) \cos \nu t \quad \dots\dots\dots (2.8)$$

与えられるので、最初の目的は達成される事になる。

3. 差分近似式の作成

ここで我々は方程式(2.3)を境界条件(2.4), (2.5), (2.6), (2.7)の下で解く事になる。このようないわゆる第三種境界値問題の数値解法は、境界の関数値がすべて与えられている問題にくらべて困難な点が多い。

まず我々は、この問題のプログラミング及び計算に要する時間が相当な分量にのぼるであろう事を考慮して、多少差分式の近似度は悪くても、計算が簡単な方式を選ぶという大方針を立てた。即ちまず池を包む領域に一樣な格子間隔 h の格子点を設ける。格子点 O のまわりにある6つの点 A, B, E, W, N, S を O の近傍点と呼ぶ時に、 F が適当な回数だけ微分可能である事を仮定すれば、 O 点のまわりでのテーラー展開から、

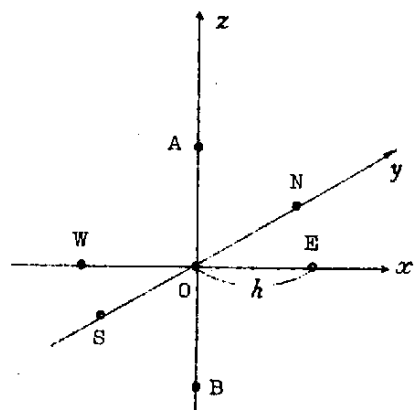


図 2

$$\Delta F = \frac{1}{h^2} \{ F(A) + F(B) + F(E) + F(W) + F(N) + F(S) - 6F(O) \} + O(h^2) \quad (3.1)$$

が成立する事が容易に証明される。従って差分解を F_A とした時に

$$F_A(A) + F_A(B) + F_A(E) + F_A(W) + F_A(N) + F_A(S) - 6F_A(O) = -\frac{w\nu^2}{gk} h^2 F_A(O) \quad (3.2)$$

と置く事は(2.3)を $O(h^2)$ の打ち切り誤差を以て近似したことになる。これを我々は7点近似と呼ぶが、打ち切り誤差を小さくする為には、27点近似を行なえば $O(h^4)$ の誤差を持つ式が求まる。然し計算及びプログラムの手間が著しく増加する上に、境界条件の取扱い上、どうしても境界付近で $O(h)$ の誤差が生ずるのでこれは採用しない。

この7点近似法を用いて計算する際に、各格子点における近傍点がすべて池の中に入っている時は問題ないが、近傍点のうちの数個が池の外へ出てしまう事があり得る。このような場合の取扱いは、例えば図3のように W がダム壁の中に入る時には、 $F_A(W)$ として

$$F_A(W) = F_A(Q) + \sqrt{1 + \xi^2} h \cdot \nu(P) \\ = (1 - \xi) F_A(O) + \xi F_A(N) + \sqrt{1 + \xi^2} h \cdot \nu(P) \quad (3.3)$$

を以て代用する。同様な事は谷の近傍でも起こるが考え方は全く同一である。このような方法のほか、N, E, Oの3点を用いて法線方向の勾配の近似を行なう方法もあるが、前者は領域をWまで拡大したものと考え、後者はOまで縮小したものと考えれば、 h を小さくしていった時に、WとOは共に真の境界に収束する事から、本質的な差のない事は明らかであろう。このような方法を用いて作った差分式は、 $O(h)$ で真の解に収束してゆく事が、ある条件の下で証明されている。

自由表面での境界条件の取扱いについて述べると、この場合A点が外に出てしまうから、図4の直方体にグリーンソンの定理

$$\iiint_V \Delta F dV = \iint_S \frac{\partial F}{\partial n} dS \quad \dots\dots\dots (3.4)$$

を適用すると

$$\iint \frac{\partial F}{\partial n} dS \doteq \frac{h}{2} \{ F(E) + F(W) + F(S) + F(N) + 2F(B) - 6F(O) \} + \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right|_O h^2 \quad \dots\dots\dots (3.5)$$

$$\iiint \Delta F dV = \iiint -\frac{w\nu^2}{gk} F dV \doteq -\frac{w\nu^2}{gk} \cdot \frac{h^3}{2} F(O) \quad \dots\dots\dots (3.6)$$

となる事と(2.6)を組み合わせると

$$\{ F_A(E) + F_A(W) + F_A(S) + F_A(N) + 2F_A(B) + 6F_A(O) + \frac{2\nu^2}{g} h F_A(O) \} = -\frac{w\nu^2}{gk} h^2 F_A(O) \quad \dots\dots\dots (3.7)$$

という式が得られる。打切誤差は $O(h)$ である。

最後に境界条件(2.7)の取扱いは、無限大を数値計算に持ち込む事は出来ないの、有限な $a(>0)$ をとり、 $y=a$ で $F=0$ と置いて、 a を谷の幅の1, 2, 4, 8倍にとつ

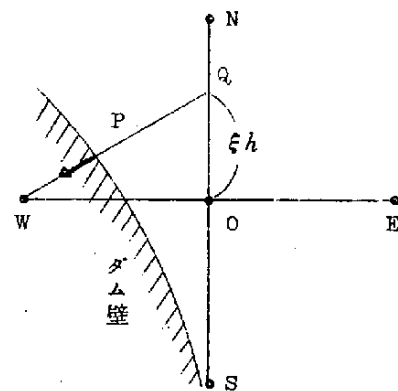


図 3

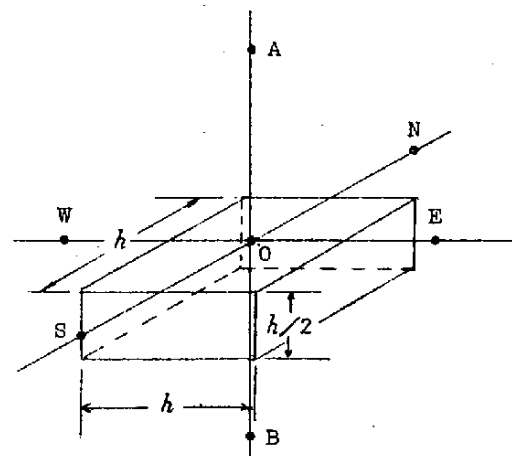


図 4

て粗い格子で予備的な計算をしてみたところ、2と8では殆んど解に違いはなく、特に一番重要なダムの面上では0.1%以下の差しかない事が分ったので、谷の幅の2倍のところで $F=0$ として計算を進めても良いだろう、という結論が得られた。

4. 反復計算——その理論

さて以上の手続によれば、池の中の各格子点において、未知数に関して線型な一つの関係式が得られた事になる。未知数を適当な順序に並べたベクトルを F_h として、上の関係をひとまとめにして、

$$AF_h = G_h \quad \dots\dots\dots (4.1)$$

と表わしておこう。Aはその次数が未知数の個数に等しい正方行列である。格子点の数が少し多くなってくれば直接Aの逆行列を求める事は出来ないので、反復法を用いて解くという事になる。

一般に反復法の基本的な考え方は

$$A = A_1 - A_2 \quad \dots\dots\dots (4.2)$$

と行列を分解して

$$A_1 F_h = A_2 F_h + G_h \quad \dots\dots\dots (4.3)$$

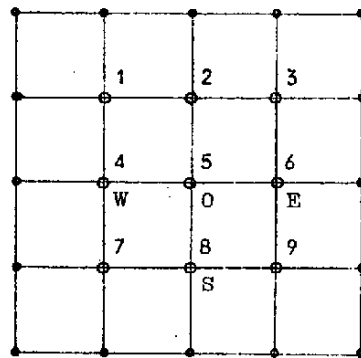
が成立するところから、初期ベクトル $F_h^{(0)}$ を適当に定めてから

$$F_h^{(n+1)} = A_1^{-1} A_2 F_h^{(n)} + A_1^{-1} G_h \quad \dots\dots\dots (4.4)$$

によって逐次近似解を求めてゆく。ここで A_1 は比較的容易に逆行列が求まるものでなければならぬ。このとき、もし行列 $A_1^{-1} A_2$ の固有値のうち絶対値が最大であるものの絶対値——これを $\rho(A_1^{-1} A_2)$ で表わす——が1より小さければ、 $F_h^{(n)}$ は n を大きくしてやったときに真の解に収束してゆくことが証明される。またこの ρ が小さいほど、 n が大きいとき漸近的に1回あたりの平均の誤差の減少の割合が大きくなる。我々は、このような点をめやすとしてAの分割のうちで、なるべく誤差の減少の著しいものを探してゆくのである。

このような考え方を使った方法のうちで、特に有名なのはS.O.R反復法とA.D.I反復法である。

説明の簡単の為、矩形領域におけるラプラス方程式のディリクレ問題を考えよう。



内部で

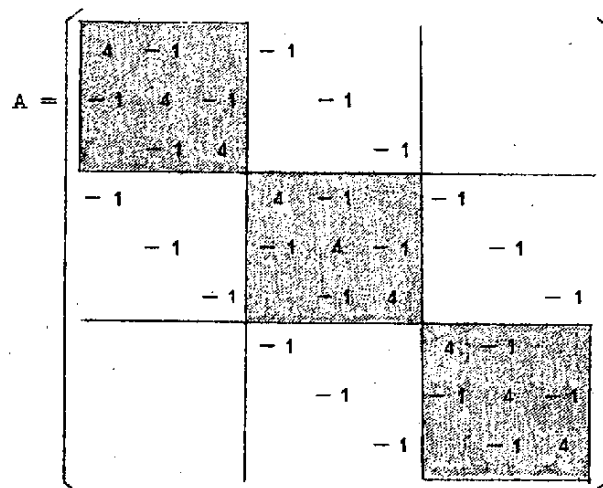
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

境界上で

$$f(x, y) = g(x, y)$$

● 既知 ○ 未知

図 5



この時、格子点に図 5 のような番号をつけ、その順序に未知数を並べると、上のような行列が得られるだろう。この A を対角行列 D 、(これは普通の意味での対角行列 D_p の場合もあれば、影を施した部分を全部とり出して来た、ブロック対角行列 D_b であっても良い。いずれも逆転の楽な行列である。) と、下三角行列 E 、上三角行列 E' とに分けて

$$A = D - E - E' \quad \dots\dots\dots (4.5)$$

と表現する。 $L = D^{-1}E$ 、 $U = D^{-1}E'$ とした時に、

$$B = L + U \quad \dots\dots\dots (4.6)$$

を A から導かれるヤコビ行列という。

$$A_1 = D, \quad A_2 = E + E' \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

なる分割から得られる

$$F_A^{(n+1)} = B F_A^{(n)} + D^{-1} G_A \quad \dots\dots\dots (4.8)$$

をヤコビ反復法といい、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\omega} (D - \omega E), \\ A_2 &= \frac{1}{\omega} \{ \omega E' + (1 - \omega) D \} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.9)$$

として導かれる

$$\begin{aligned} F_A^{(n+1)} &= (I - \omega L)^{-1} \{ \omega U + (1 - \omega) I \} F_A^{(n)} + \omega (I - \omega L)^{-1} D^{-1} G_A \\ &\equiv \omega F_A^{(n)} + \omega (I - \omega L)^{-1} D^{-1} G_A \quad \dots\dots\dots (4.10) \end{aligned}$$

を S.O.R. (Successive Over-Relaxation) 反復法と呼ぶ。ここで ω は加速パラメータと呼ばれ、特に ω_1 即ち $\omega = 1$ のときガウス・ザイデル反復法と呼ぶ。

$D = D_F$ とした時の具体的な計算式は、ヤコビ法では、

$$\begin{aligned} F_A^{(n+1)}(O) &= F_A^{(n)}(O) + \{ F_A^{(n)}(W) \\ &\quad + F_A^{(n)}(S) + F_A^{(n)}(E) - 4F_A^{(n)}(O) \} / 4 \quad \dots\dots\dots (4.11) \end{aligned}$$

であり S.O.R法では

$$\begin{aligned} F_A^{(n+1)}(O) &= F_A^{(n)}(O) + \omega \cdot \{ F_A^{(n+1)}(N) + F_A^{(n+1)}(W) \\ &\quad + F_A^{(n)}(S) + F_A^{(n)}(E) - 4F_A^{(n)}(O) \} / 4 \quad \dots\dots\dots (4.12) \end{aligned}$$

で与えられる。(4.12)の右辺の第二項の括弧の中は残差であり、本来0となるべきものであって、収束判定の基準を与えるので、 $R^{(n+1)}(O)$ と表わしておく。 D として D_B をとった場合には、図5の一つの水平線上にのっている全未知数について上と同じ考え方で、一挙にまとめて解く事にあたる。

S.O.R反復法については、次の3つの重要な定理が成立する。

1. 非負の要素から成るヤコビ行列について、 $\rho(B) < 1$ は $\rho(\omega_1) < \rho(B)$ と同値である。

従って収束の速さの点で、 ω_1 の方が B よりすぐれているわけである。更に(4.11)と(4.12)を比較して分るように、 B では $F_A^{(n+1)}$ を計算する間中 $F_A^{(n)}$ 全部を記憶せねばならないのに対し、 ω_1 ではそのような事は無く、次々と新しい値で置き換えて行ける。即ち二重の意味で ω_1 の方が B よりすぐれていると言える。

2. A がエルミート行列で、 D も又エルミート行列で且つ正定値であるものとする。又 $D - \omega E$ が $0 \leq \omega \leq 2$ なるすべての ω について非特異であるとする。その時、 $\rho(\omega) < 1 \iff A$ が正定値で且つ $0 < \omega < 2$ が成立する。

3. A が 2-cyclic 行列で且つ consistently ordered ($B(\alpha) = \alpha L + \frac{1}{\alpha} U$ の固有値が α と無関係である事) であって, D が非特異な場合, B の固有値が全部実数であれば, $0 < \omega < 2$ なるすべての ω について, $\rho(\mathcal{L}\omega) < 1$ であり

$$\omega = \omega_{\text{opt}} = 2(1 + \sqrt{1 - \{\rho(B)\}^2})^{-1} \quad \dots\dots\dots (4.13)$$

において $\rho(\mathcal{L}\omega)$ は最小になる。

本節で具体的に例として示した行列 A は, 上の 3 つの定理の条件をすべて満たしている訳であるが, 現実の問題ではそのいずれも満たされない事が多い。

もう一方の A.D.I 法の考え方を同一の例題について考えてみる。この場合は,

$$A = H + V$$

と分解する。ここで H, V はそれぞれ $\partial^2 f / \partial x^2, \partial^2 f / \partial y^2$ から得られる行列である。そして

$$\left. \begin{aligned} (r_n I + H) F_h^{(n+1/2)} &= (r_n I - V) F_h^{(n)} + G_h \\ (r_n I + V) F_h^{(n+1)} &= (r_n I - H) F_h^{(n+1/2)} + G_h \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (4.14)$$

で定義される反復法を Peaceman-Rachford の A.D.I 法と呼ぶ。A.D.I とは, Alternating Direction Implicit の頭文字をとったものであり, その名のとおりまず x 軸に平行な一本の直線上にある未知数を, まとめて一度に求めてしまい, 一番下のラインまで行ったら, 今度は y 軸方向に同様な手順を繰り返すのである。(4.14) を見て分るように, 一回の反復は二段階からなっており, D_B を用いた S.O.R 反復法に比べて, 一回あたり倍の手間と倍の記憶容量が必要となる。この方法の長所は, H と V が可換で正定値である時(上の例ではこれは成立している)に良く発揮され, その場合には $r_n > 0$ ならば必ず収束し, r_n を毎回適当に選ぶ事により非常に速い収束が得られる。ところが $HV = VH$ となる為には, 原方程式, 境界条件及び境界の形状が満たすべき条件はひどくシビアなものとなり, 仮にこれが成立しても, パラメータ r_n の選び方は S.O.R 法の時よりずっと難かしい。また $r_n = r$ と固定した場合には, 上の例については, D_B による S.O.R 法と漸近的に (n が大きく h が小さいという意味で) 同じ漸近収束性をもつので, 結局計算時間, 記憶容量はともに倍必要になるのであって, それ程すぐれているとは言えない。

さて既に述べたように, 常に最新の近似値を用いる $\mathcal{L}_1$ は B に比して記憶容量と収束の速さの両面から, 有利になるのであったが, この考え方を A.D.I 法に持ちこんだらどうなるだろうか。これについては, $r_n = r$ と固定した場合には, 予想通り収束が速くなる事がある条件の下で, 理論的, 実験的に筆者によって確かめられた。但し結局においては, D_B による S.O.R 法とほとんど同一の結果が得られたという事を付け加えて置く。

5. 反復計算 — その実際

3で得られた方程式を D_p による S O R 法で解く事を考える。この時、係数行列 A の果たす役割が本質的なものである事は既に前節で述べた通りであるので、これを調べてみると、3つの定理の条件のいずれも満たされていない事が分る。然し全般的に言って、 h が小さい時には、それらの条件にかなり近い性質を持っている事も分る。従って、S. O. R 法が収束するという保証は、必ずしも得られないが、経験上は先ず大丈夫であろう。

具体的な計算は、こういう場合の常套手段として、はじめは粗い格子点行い次第にこれを細かくしてゆく。これは一つには、 $F_A^{(0)}$ をなるべく真の解に近くとってやった方が収束が速い事と、解の誤差の評価に役立つからである。ある h についての計算は、一応、

$$\max_0 |R^{(n)}(0)/h^2| \leq h \quad \dots\dots\dots (5.1)$$

が成立した時に終了する。これは境界の近傍での近似式が $O(h)$ の誤差を持つので、余り詳しく解を求めてやっても意味がないからである。相対誤差による方法は、上流で $F_A(0)$ 自体が極めて小さくなる可能性があるので採用しない。

最適パラメータ ω の推定については、 $\omega = 1$ とした時に n の大きなところで

$$\sum \{R^{(n)}(0)\}^2 = \{\rho(B)\} + \sum \{R^{(n-1)}(0)\}^2 \quad \dots\dots\dots (5.2)$$

が成立する事を用いて $\rho(B)$ を出し、(4.13)に従って ω_{opt} を計算する。実際には残差は、はじめは不規則に変化し、次第になめらかに減るので、はじめの方は捨てて n が6から10までの5回の平均を用いる。

又計算の途中で残差平方和が、10回前のそれより多くなったら計算は停止する。はじめの数回のところでは、一時的にこれが増加する可能性があるので(図6参照)、このようなゆるい条件を課したのである。

前節で例として示した問題における経験では、領域の内部の点では $\omega = \omega_{opt}$ を用い、境界の近傍では $\omega = 1$ とした方が収束の早い事が分っているので、部分的にこの方式を採用する事にした。

計算機は IBM 7090 を用いるので FORTRAN II でプログラムした結果、ソースプログラムはサブプログラムも含めてカード約750枚になった。記憶容量の関係で h は谷の巾の $1/10, 1/20, 1/40$ で行った。実際に必要なのは既に述べたように、ダムの上での F の挙動であるので、これを比較してみると $\frac{1}{20}, \frac{1}{40}$ の時とでは約30%内外の誤差がある。従って本来はまだまだ計算を続けねばならないけれども、費用の点及び検討中ではあるが、一応定性的には良い結果が得られたので、ここまですトップしてある。これからは、ダムの面のごく近所だけ格子を細かくして近似を高める事も考慮する必要があるだろう。

最後に誤差の減少曲線を図示しておく。ここで N は格子点の数である。 $h = \frac{1}{10}$ については、 $\omega = 1.0$ と (4.13) から得られた $\omega_{opt} = 1.38$ とを比較してみたが ω_{opt} の方が相当良い収束を見せている事が分るだろう。

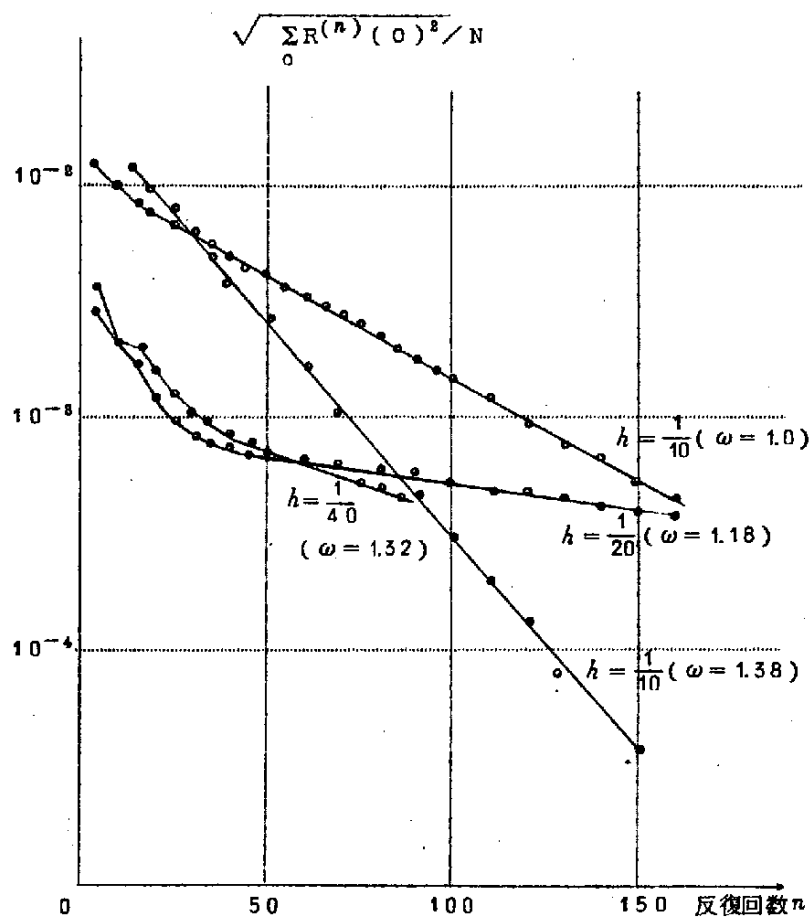


図 6

4.3 応用 2 (アーチダムに作用する地震時動水圧の数値解)

1) Symmetric Vibration

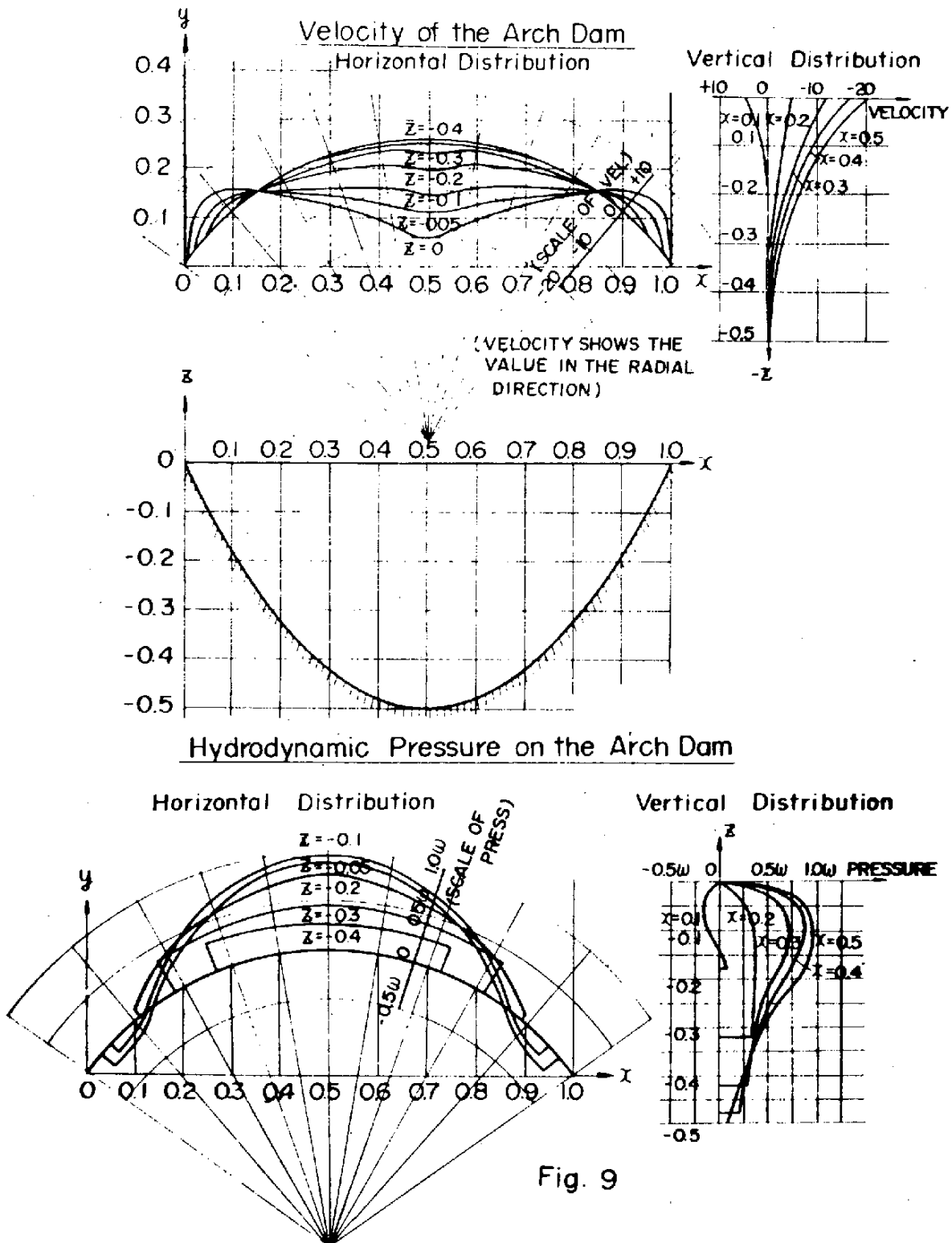
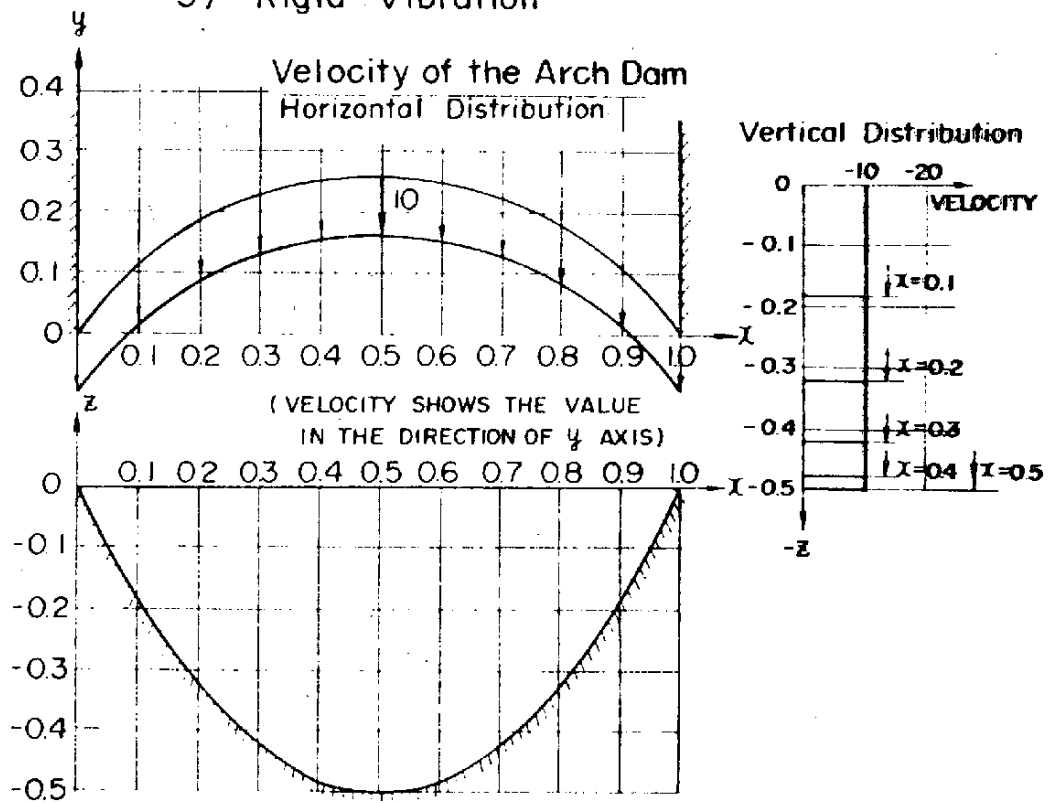


Fig. 9

3) Rigid Vibration



Hydrodynamic Pressure on the Arch Dam

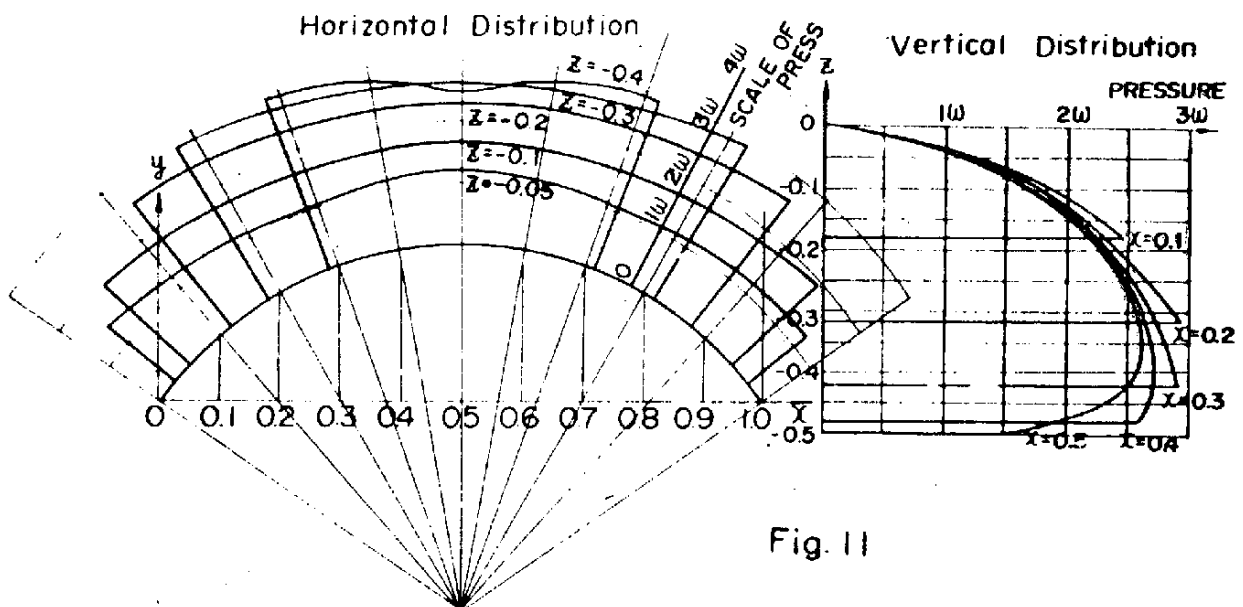
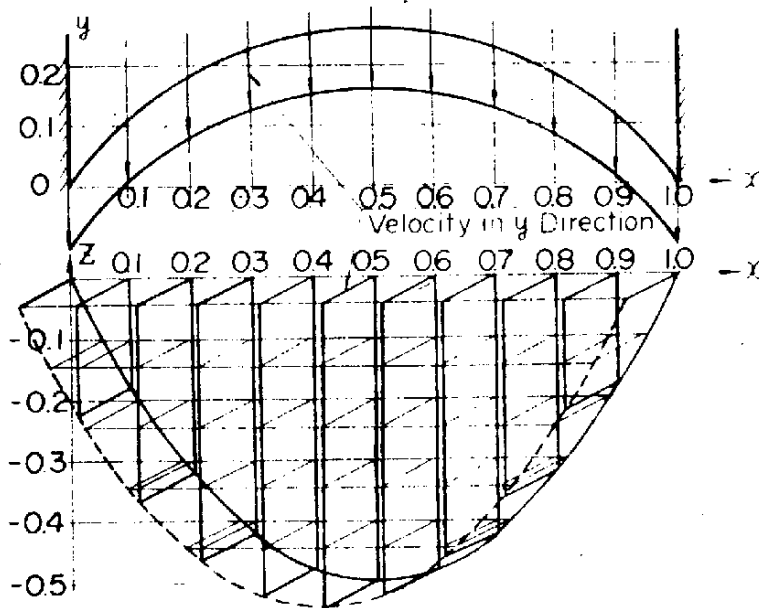


Fig. II

Velocity Distribution



Pressure Distribution

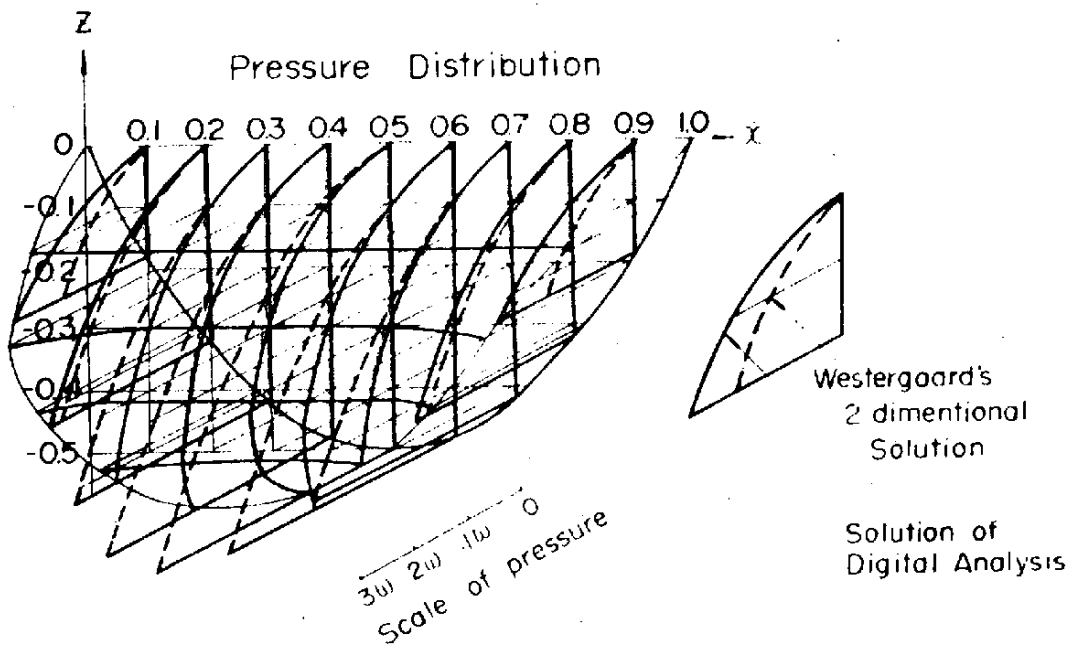
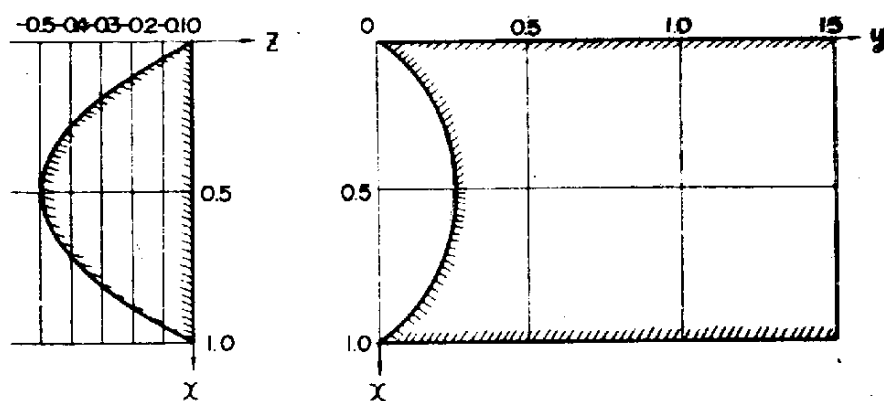
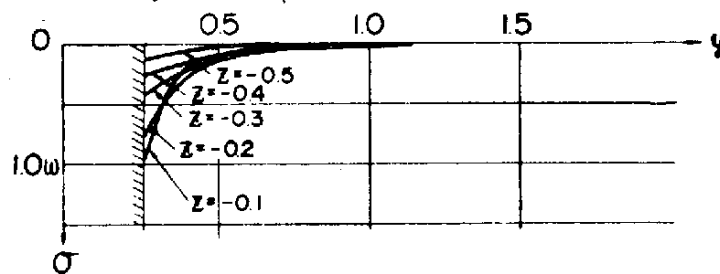


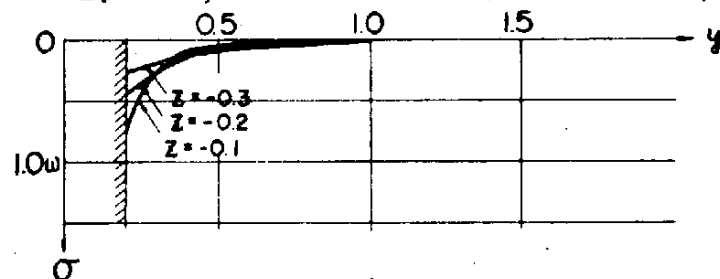
Fig. 12



1) Symmetric Vibration (in the vertical plane $x=0.5$)



2) Antisymmetric Vibration (in the vertical plane $x=0.75$)



3) Rigid Vibration (in the vertical plane $x=0.5$)

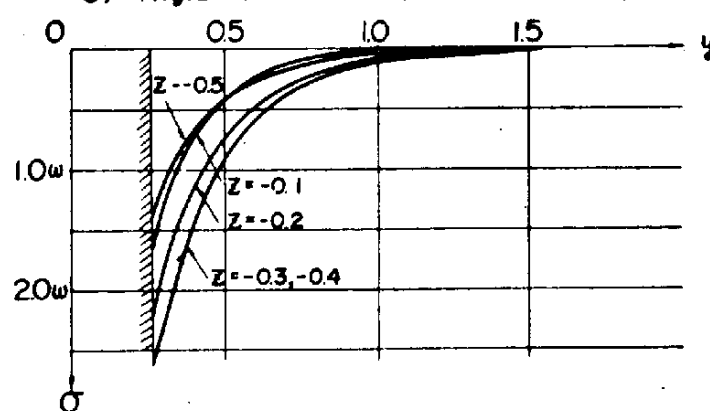


Fig. 13 Distribution of Hydrodynamic Pressure in the Reservoir

プログラム 3-3-1 固有値と固有ベクトル

```

begin array A[1:5, 1:5], V, X[1:5];
      integer I, J, K, L, M, N;
      real MAX, S, DELTA, W;
START: READREAL(DELTA); READINTEGER(N);
      for I:=1 step 1 until N do
        for J:=1 step 1 until N do READREAL(A[J, I]);
        L:=0;
LOOP:  L:=L+1;
        for I:=1 step 1 until N do X[I]:=1.0;
ITER:  MAX:=0;
        for I:=1 step 1 until N do
          begin S:=0;
            for J:=1 step 1 until N do
              S:=S+A[I, J]*X[J]; V[I]:=S;
              if ABS(MAX)<ABS(S) then
                begin MAX:=S; M:=I end
            end;
            for I:=1 step 1 until N do V[I]:=V[I]/MAX;
            for I:=1 step 1 until N do
              if ABS(V[I]-X[I])>DELTA then go to REP;
            go to PRINT;
REP:   for I:=1 step 1 until N do X[I]:=V[I];
            go to ITER;
PRINT: CRLF; PRINTREAL(MAX); CRLF;
            for I:=1 step 1 until N do PRINTREAL(V[I]);
            if L=N then go to STOP;
            for I:=1 step 1 until N do
              begin W:=A[I, M];
                for J:=1 step 1 until N do
                  A[I, J]:=A[I, J]-W*X[J]
                end;
              go to LOOP;
STOP:  HALT; go to START
end

```


プログラム 3-4-1 連立一次方程式のプログラム (ALGOL)

```

begin integer M, N, I, J, K, R;
      real W, EPS;
      array A[1:20, 1:50];
  READREAL(EPS); READINTEGER(M); READINTEGER(N);
  for J:=1 step 1 until M+N do
  for I:=1 step 1 until M do READREAL(A[I,J]);
  for K:=1 step 1 until M do
  begin W:=0;
    for I:=K step 1 until M do
    if ABS(A[I,K]) > W then
    begin W:=ABS(A[I,K]); R:=I; end;
    if W < EPS then go to ILL;
    if R=K then go to L1;
    for J:=K step 1 until M+N do
    begin W:=A[K,J]; A[K,J]:=A[R,J];
      A[R,J]:=W; end;
  L1: for J:=K+1 step 1 until M+N do
    A[K,J]:=A[K,J]/A[K,K];
    for I:=1 step 1 until M do
    if I≠K then for J:=K+1 step 1 until M+N do
    A[I,J]:=A[I,J]-A[I,K]*A[K,J];
  end;
  for J:=M+1 step 1 until M+N do
  begin CRLF; CRLF; PRINTINTEGER(J-M);
    CRLF; K:=0;
    for I:=1 step 1 until M do
    begin K:=K+1; if K≠6 then go to L2;
      K:=1; CRLF;
  L2: PRINTREAL(A[I,J]) end;
  end; go to STOP;
  ILL: CRLF; PRINTSTRING('ILL##K=');
    PRINTINTEGER(K);
  STOP;
end

```

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM 3-1

WRITTEN BY 内 積

DATE _____

COMM 1	STATE- MENT NUMBER 2	CONT 5	FORTRAN STATEMENT																IDENT	
			6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80						
C			INNER PRODUCT OF VECTORS															005		
			READ (5,100) N															010		
			S=0.0															015		
			DO 10 I=1,N															020		
			READ (5,101) A,B															025		
			S=S+A*B															030		
	10		CONTINUE															035		
	101		FORMAT (2F10.0)															040		
			WRITE (6,102) S															045		
	102		FORMAT (1H1,10X,3HS =,E14.5)															050		
			STOP															055		
			END															060		
																		065		
																		070		
																		075		
																		080		
																		085		
																		090		
																		095		
																		100		

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM 3-2

WRITTEN BY 行列の積

DATE _____

COMM	STATE- MENT		CONT	FORTRAN STATEMENT																IDENT	
	1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80						
C																					0.05
																					0.10
																					0.15
	1.00																				0.20
																					0.25
																					0.30
	1.0																				0.35
	1.01																				0.40
																					0.45
																					0.50
	2.0																				0.55
																					0.60
																					0.65
																					0.70
	4.0																				0.75
																					0.80
																					0.85
																					0.90
																					0.95
																					1.00

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

STATE- MENT NUMBER		FORTRAN STATEMENT																IDENT	
1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80					
	60				CONTINUE									005					
					C(K,I)=S									010					
	50				CONTINUE									015					
	30				CONTINUE									020					
					WRITE (6,102)									025					
	102				FORMAT (1H1,20X,23HTABLEAU OF MATRIX C=A*B//1H6,10X)									030					
					DO 70 I=1,L									035					
					WRITE (6,103) I									040					
	70				CONTINUE									045					
	103				FORMAT (1H1,I12)									050					
					DO 80 K=1,M									055					
					WRITE (6,104) K,(A(K									060					
	80				CONTINUE									065					
	104				FORMAT (1H6,5X,I5,10F12.3)									070					
					STOP									075					
					END									080					
														085					
														090					
														095					
														100					

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM 3-3-2

WRITTEN BY 固有値と固有ベクトル

DATE _____

COMM	STATE -		CONT	FORTRAN STATEMENT																IDENT																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																				
	MENT	NUMBER		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
	1	2	5	6	7																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			

PAGE ____ OF ____

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

COMM 1	STATE- MENT NUMBER 2	CONT 5	CONT 6	CONT 7	FORTRAN STATEMENT										IDENT				
					10	20	30	40	50	60	70	72	73	80					
					S=S+A(I,J)*X(J)														005
	60				CONTINUE														010
					V(I)=S														015
					IF (ABS(MAX).GE.ABS(S)) GO TO 50														020
					MAX=S														025
					M=I														030
	50				CONTINUE														035
					DO 70 I=1,N														040
					V(I)=V(I)/MAX														045
	70				CONTINUE														050
					DO 80 I=1,N														055
					IF (ABS(V(I)-X(I)).GT.DELTA) GO TO 90														060
	80				CONTINUE														065
					GO TO 110														070
	90				DO 100 I=1,N														075
					X(I)=V(I)														080
	100				CONTINUE														085
					GO TO 45														090
	110				WRITE (6,203) MAX														095
	203				FORMAT (1H1,10X,E14.5//)														100

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

STATE- MENT NUMBER		FORTRAN STATEMENT																IDENT	
1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80					
						WRITE (6,204) (V(I),I=1,N)								0.05					
	204					FORMAT (1H0,10X,5E14.3)								0.10					
						DO 120 I=1,N								0.15					
						W=A(I,M)								0.20					
						DO 130 J=1,N								0.25					
						A(I,J)=A(I,J)-W*V(J)								0.30					
	130					CONTINUE								0.35					
	120					CONTINUE								0.40					
	30					CONTINUE								0.45					
						GO TO 10								0.50					
						STOP								0.55					
						END								0.60					
														0.65					
														0.70					
														0.75					
														0.80					
														0.85					
														0.90					
														0.95					
														1.00					

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM 3-4-2

WRITTEN BY 連立一次方程式

DATE _____

STATE- MENT NUMBER		CONT	FORTRAN STATEMENT															IDENT	
1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80					
														0:05					
C														0:10					
														0:15					
														0:20					
														0:25					
	20:1													0:30					
														0:35					
														0:40					
														0:45					
	5													0:50					
	20:2													0:55					
														0:60					
														0:65					
														0:70					
														0:75					
														0:80					
														0:85					
	20													0:90					
	30													0:95					
														1:00					

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

STATE- MENT NUMBER		FORTRAN STATEMENT										IDENT		
1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80
					D0	40	J=K,MN							005
					W=A(K,J)									010
					A(K,J)=A(R,J)									015
					A(R,J)=W									020
40					C0NTINUE									025
50					D0	60	J=K+1,MN							030
					A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)									035
60					C0NTINUE									040
					D0	70	I=1,M							045
					IF (I.EQ.K) G0 T0 10									050
					D0	80	J=K+1,MN							055
					A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,J)									060
80					C0NTINUE									065
70					C0NTINUE									070
10					C0NTINUE									075
					D0	90	J=M+1,MN							080
					JM=J-M									085
					WRITE (6,203) JM									090
203					F0RMAT (1H5,10X,I10/)									095
					WRITE (6,204) (A(I,J),I=1,M)									100

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

STATE - MENT NUMBER		FORTRAN STATEMENT																IDENT	
1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80					
	204				FORMAT (I16, 10X, 5E14.5)												005		
	90				CONTINUE												010		
					GO TO 110												015		
	100				WRITE (6, 205) K												020		
	205				FORMAT (I11, 10X, 18HILL CONDITION K = 110)												025		
	110				STOP												030		
					END												035		
																	040		
																	045		
																	050		
																	055		
																	060		
																	065		
																	070		
																	075		
																	080		
																	085		
																	090		
																	095		
																	100		

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM 4-2

WRITTEN BY Runge - Kutta - Gill

DATE _____

COM	STATE- MENT NUMBER	CONT	FORTRAN STATEMENT										IDENT	
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
														005
C														010
C														015
														020
														025
														030
														035
														040
														045
														050
														055
														060
														065
														070
														075
														080
														085
C														090
														095
														100

PAGE OF

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

COMM	STATEMENT NUMBER						FORTRAN STATEMENT										IDENT	
	1	2	5	6	7		10	20	30	40	50	60	70	72	73	80		
							K=H*F(I)										005	
							QI=Q(I)										010	
							R=0.5*K-QI										015	
							Q(I)=QI+3.0*K	R=0.5*K									020	
							Y(I)=Y(I)+R										025	
	30						CONTINUE										030	
							CALL UHEN										035	
							DO 40 I=1,M										040	
							K=H*F(I)										045	
							QI=Q(I)										050	
							R=0.2928932*(K-QI)										055	
							Q(I)=QI+3.0*K	R=0.2928932*K									060	
							Y(I)=Y(I)+R										065	
	40						CONTINUE										070	
							CALL UHEN										075	
							DO 50 I=1,M										080	
							K=H*F(I)										085	
							QI=Q(I)										090	
							R=1.707107*(K-QI)										095	
							Q(I)=QI+3.0*K	R=1.707107*K									100	

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

STATE- MENT NUMBER		FORTRAN STATEMENT															IDENT	
1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80				
					Y(I)=Y(I)+R									005				
50					CONTINUE									010				
					CALL UHEN									015				
					DO 60 I=1,M									020				
					K=H*F(I)									025				
					QI=Q(I)									030				
					R=(K-2.0*QI)/6.0									035				
					Q(I)=QI+3.0*R-0.5*K									040				
					Y(I)=Y(I)+R									045				
60					CONTINUE									050				
					CALL UHEN									055				
					CALL INSATU									060				
20					CONTINUE									065				
					STOP									070				
					END									075				
														080				
														085				
														090				
														095				
														100				

FORTRAN CODING SHEET

PROGRAM _____

WRITTEN BY _____

DATE _____

COMM	STATE- MENT		CONT	FORTRAN STATEMENT																IDENT	
	1	2	5	6	7	10	20	30	40	50	60	70	72	73	80						
																				005	
																				010	
																				015	
																				020	
																				025	
																				030	
																				035	
																				040	
																				045	
																				050	
C																				055	
																				060	
																				065	
107																				070	
																				075	
																				080	
																				085	
																				090	
																				095	
																				100	

