

一 統 計 解 析 一

財団法人 日本情報処理開発センター

6808

一 統計解析 一

財団法人 日本情報処理開発センター

一

二

三

四

三六三 國語文法 第三版

第 1 章 最 小 二 乗 法

§ 1 母数の推定

実験を行ったときの測定値、また観測をしたときの観測値、調査をしたときのデータなど、これらの値は2個以上とられるとき、そのおのおのが異っているのが普通である。

たとえば10名の集団の身長を測定したとき単位をcmとして

163.2, 171.6, 156.3, 159.2, 160.0, 158.7, 167.5, 175.4, 172.8, 153.5

が得られたとする。この場合この集団を他の集団と比較するとき色々な方法が考えられる。

そのうち最も良く用いられるのが平均値であるが、その他にも最大値、最小値、中央値などで比較することも可能である。またグラフで比較することもできる。

また工場で同じ太さの丸棒を500本作り出したとき、その直径を精しく測定してみると一本一本異なっている。しかしその全体を集団としてみるとたとえば表1のような値が与えられたとする。これを図示すると図1の如くなる。

表 1. 丸棒の太さの
度数分布

太さの範囲(mm)	個 数
13.05 ~ 13.09	1
13.10 ~ 13.14	4
13.15 ~ 13.19	4
13.20 ~ 13.24	18
13.25 ~ 13.29	38
13.30 ~ 13.34	56
13.35 ~ 13.39	69
13.40 ~ 13.44	96
13.45 ~ 13.49	72
13.50 ~ 13.54	68
13.55 ~ 13.59	41
13.60 ~ 13.64	18
13.65 ~ 13.69	12
13.70 ~ 13.74	2
13.75 ~ 13.79	1

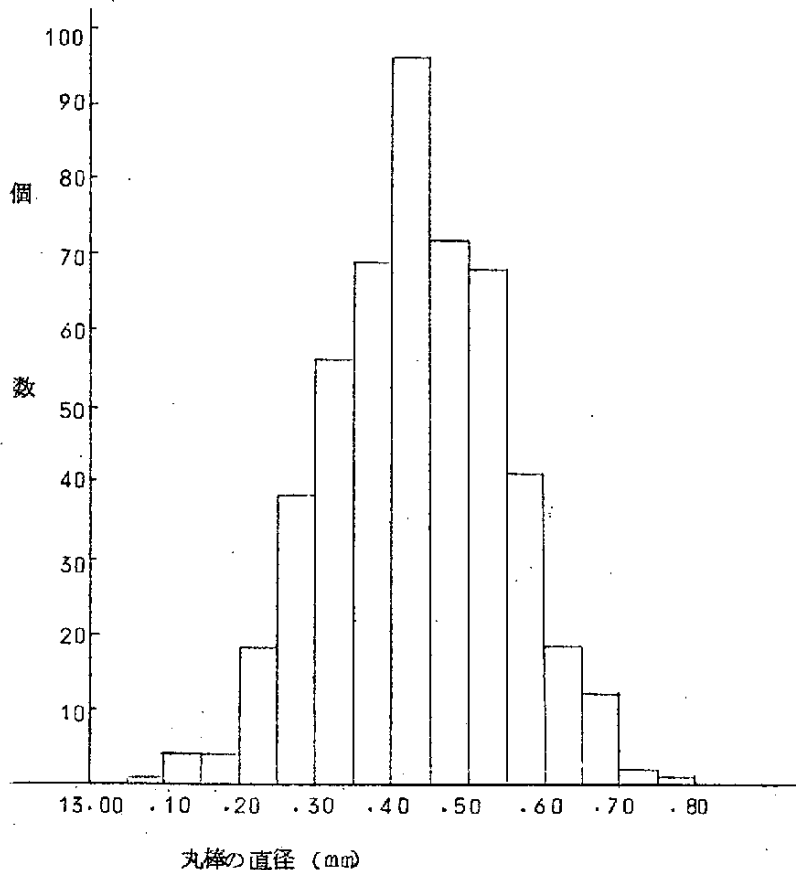


図 1. 丸棒の直径の度数分布図

このようなデータをもっと集めてみると色々違った値がでるが、しかしこれを全体として見るとある一定の性質があることが経験的に知られている。すなわち全体の位置とか、ひろがりとか、分布の形などは条件が大きく変化しないかぎりほぼ一定の値をとるのが普通である。

このようなもとのもの、あるいは将来も同一であると予想されるデータの集りのことを母集団という。

もしわれわれがあるデータの母集団を知るならば将来おこることについて予想を立てることができる。

たとえば身長についてわかれば、既製服を作るときサイズをきめることができるし、丸棒の太さの母集団を知るならば規格をはずれる不良品がどの位でるか、その率などを知ることができる。

母集団の特徴を示すのにグラフでも良いが、もし数値で示し得るならば色々な処理をするのにさらに便利であろう。

すなわち他の母集団との差とかヒロガリを比較するとき、グラフで重ねあわせても良いがそれが数字で出されているならば、大小関係などを直ちにすることができる。

このような特徴を示す数字のことを母数と呼んでいる。

統計的な処理のうちの一つのものとしてこの母数を求めることもかなり大きな分野である。

良く用いられる母数としては平均、これはまた母集団の平均という意味で標本の平均と区別して母平均と呼ばれる。この値はその母集団の位置を示すことになる。2個の母集団の比較をするとき母平均で比較ができる。会社Aと会社Bとの給料の比較などというとき、たがいの会社の平均給与額で比較をするなどがこの例である。

またその集団のバラツキの大きさを示すのに母標準偏差、母分散などが用いられる。これは分布の広がりを出すことになる。

さてわれわれは母数の値は知らないのが普通で、これをデータからもとめる必要がある。このようにデータから母数の値を推測することを母数の推定と呼んでいる。

この推定法には色々な方法があるがこれらのうちで最小二乗法というのが有力な方法である。

これは一般に母数の推定値を仮定して、データとの差を残差としたときその残差の二乗の和が最小になるように定める方法である。

例： 真 の 値 = (母 数 : 一 定 値)

誤 差 = ($i = 1, 2, \dots, n$)

測 定 値 = ($i = 1, 2, \dots, n$)

として

$$y_i = \mu + e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.1)$$

なる式が成立するものとする。すなわち測定値は真値と誤差とよりなっているものとする。求めたいのは μ の値であり、しかし e_i の値が不明であるので μ の真の値は分らない。しかし何回も測定を行なうと測定値にはかなり規則性のあることがわかる。

通常 μ の値は一定である筈であり、 e_i の方が変動するものと考えて処理を行なう。

e_i については通常次の4つの仮定が満足されているものとする。この4つの仮定はこの例題にかぎらず、以下の一般の最小二乗法のときにも成立するものと考えて理論が進められる。

(1) 独 立 性

誤差の大きさはその前に行なわれた実験、観測等の誤差の大きさとは無関係である。すなわち、前の誤差が大きいとしても次の誤差は大きいとも小さいともいえない。要するに全体の誤差はランダムに生じているものとする。統計的な用語を用いるならば、誤差は互いに独立な確率変数であるといわれる。すなわち、一定の分布形はもっているが、それぞれはその

分布形のもつ確率に従って生じてくるのであって、他のものの条件にはよらないということである。この独立性の条件が満たされていないときは以下の理論には大きな影響を与えることが多いので注意が必要である。実用上よくランダムにデータを取りなさいといわれるのもこれが一つの理由である。

(2) 不 偏 性

誤差の分布の平均は0である。すなわち偏りをもっていないということである。これを統計の用語では誤差の期待値は0であるといい、記号で

$$E(e_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.2)$$

と書く。この仮定はもし偏りが常に一定であればその分を μ の方に織り込むことによって常に満足するようにすることができる。すなわち

$$\begin{aligned} E(y_i) &= \mu + E(e_i) \\ &= \mu + \alpha \\ &= \mu' \end{aligned} \quad (1.3)$$

のように $\mu + \alpha$ を改めて μ' とおいて前と同様に扱えばよい。この仮定は通常の場合みだされているものと考えてよい。

(3) 等 分 散 性

誤差の分散はすべて等しい。すなわち誤差のバラツキ方を示す標準偏差についても一定であるわけである。このことを統計的用語では誤差の分散が等しいといい、記号的には、

$$V(e_i) = \sigma^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

で示される。この仮定は色々な問題があり、その推定値の形によって大きい影響をもつものと、もたないものがある。その影響をうけ難いものを頑健性が大であるといい、推定式の一つの好ましい性質といえる。

(4) 正 規 性

誤差は正規分布に従う。この仮定は通常実用上は満足されることが多いし、また(3)の場合と同様に適当な推定式の下では多少の分布の形の違いは問題にならない。すなわち頑健性をもつものを考えるならば問題はない。

以上をまとめて、誤差 $e_1, e_2, \dots, e_n$ はたがいに独立に正規分布 $N(0, \sigma^2)$ に従うという。

$N(\mu, \sigma^2)$ は正規分布で平均が μ 、分散が σ^2 であるものをいう。

これを記号的に

$$e_i \sim \text{NID}(0, \sigma^2) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.5)$$

とも書く。ここにNは正規分布(Normal Distribution)の頭文字をとったものである。IDは独立(Independent)の頭をとったものである。次の0は平均が0であることを示し、 σ^2 は分散が σ^2 であることを示す。すなわち e_i は正規分布に従い、たがいに独立であり期待値が0であること、すなわち不偏性を示し、分散が i の如何にかかわらず σ^2 で等しいこと、すなわち等分散性を示す。

(注) これら4つの条件はすべてが必要であるとはかぎらない。問題の性質によっては正規性がなくてもよい場合もある。また独立性の仮定も無相関でおきかえることができる場合

もある。

以上のような条件の下で (1.1) 式の母数 μ を求めてみよう。

μ の推定値を $\hat{\mu}$ で示す。以下においても一般に母数 β の推定値を $\hat{\beta}$ で表わすことにする。これを " β の山 " とか, " β ハット " などと呼ぶ。

(1.1) 式を書き直して

$$y_i = \hat{\mu} + e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.6)$$

で表わすことにする。ここで最小二乗法で用いられている手法を適用してみよう。すなわち, e_i が残差であるが, その残差の二乗の和が最小になるように μ を定めるのである。

式で示すと

$$\begin{aligned} Q &= e_1^2 + e_2^2 + \dots + e_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n e_i^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

が残差平方和である。これに (1.6) 式を代入すれば

$$Q = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu})^2 \quad (1.8)$$

となる。 Q を最小にするためには Q を $\hat{\mu}$ について微分して 0 とおくことにより $\hat{\mu}$ を求めればよい。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial \hat{\mu}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \hat{\mu}} (y_i - \hat{\mu})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n -2(y_i - \hat{\mu}) \\ &= -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

ここで (1.9) 式が 0 となるように $\hat{\mu}$ を定めれば

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{\mu}) = 0 \quad (1.10)$$

がえられる。 $\hat{\mu}$ をまとめて外に出せば

$$\sum_{i=1}^n y_i = n \hat{\mu} \quad (1.11)$$

これより

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (1.12)$$

がえられる。

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \\ &= \frac{1}{n} (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \end{aligned} \quad (1.13)$$

であるとなれば (1.12) 式を用いて

$$\hat{\mu} = \bar{y} \quad (1.14)$$

がえられる。すなわち算術平均が母数 μ の最小二乗推定量となることがわかる。これを数値で示してみよう。

数 値 例

$$\begin{array}{lll} y_1 = 68 & y_2 = 46 & y_3 = 59 \\ y_4 = 30 & y_5 = 67 & \end{array}$$

があたえられているとき

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(68 + 46 + 59 + 30 + 67) = 54 \quad (1.15)$$

で $\bar{y} = 54$ が求める μ の推定値となる。このとき Q の値を S_E とすれば

$$\begin{aligned} S_E &= (68 - 54)^2 + (46 - 54)^2 + (59 - 54)^2 + (30 - 54)^2 + (67 - 54)^2 \\ &= 14^2 + (-8)^2 + 5^2 + (-24)^2 + 13^2 \\ &= 196 + 64 + 25 + 576 + 169 \\ &= 1030 \end{aligned} \quad (1.16)$$

この S_E の値の求め方には色々な方法がある。

(1.16) 式もその一つの方法であるが、一般には $\bar{y}$ の値は小数以下適当な所で4捨5入などでまるめる必要があるので何回も演算を行なうと丸めの誤差が大きくなること、また y_i の値が2桁であっても、 $\bar{y}$ の方は有効桁数が大となるので、 $y_i - \bar{y}$ も有効桁数が大となってくるので精度を上げるためには次のような方法が用いられる。すなわち(1.8)式より

$$\begin{aligned} S_E &= \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i^2 - 2y_i\bar{y} + \bar{y}^2) \\ &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2\bar{y} \sum_{i=1}^n y_i + \bar{y}^2 \sum_{i=1}^n 1 \\ &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - 2n\bar{y}^2 + n\bar{y}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - n\bar{y}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \end{aligned} \quad (1.17)$$

この一番終りの式を用いて計算を行なうのがマルメの影響が一番小さい。しかし(1.17)式または次のような変形も可能である。

$$\left. \begin{aligned} S_E &= \sum_{i=1}^n \{ y_i - a - (\bar{y} - a) \}^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i - a)^2 - \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - a) \right\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

この式は y_i の値が大体同じ位の値であるとき、すなわち μ が大で σ_i が小であるときに有効であ

る。

$$\begin{array}{lll} \text{例:} & y_1 = 1068 & y_2 = 1046 & y_3 = 1059 \\ & y_4 = 1030 & y_5 = 1067 & \end{array}$$

のとき $a = 1000$, または 1050 として計算を行えばよい。(1.17)式で行うのと比較すれば桁数が小さくてすむので計算機で行うときでも記憶部分の有効桁数が少なくて済む。

このようにして求めた(1.12)式で与えられる $\hat{\mu}$ の値は前述の4つの条件が満たされている限りではその期待値が μ に等しく, またその分散は他の如何なる形の測定値の組合せによるその期待値が μ に等しい推定値よりもその分散が小である。式で示すと,

$$\left. \begin{array}{l} E(\hat{\mu}) = \mu \\ V(\hat{\mu}) \rightarrow \text{最小} \end{array} \right\} \quad \dots \dots (1.19)$$

となる。これを統計的用語では $\hat{\mu}$ は μ の不偏推定である(偏りがない)と同時に最小の分散の推定であるという意味で不偏最小分散推定と呼ばれている。

このとき求めた S_E の値は誤差 e の分散 σ^2 の推定に用いられる。すなわち

$$\hat{\sigma}^2 = S_E / (n - 1) \quad \dots \dots (1.20)$$

である。

§ 2 線形回帰式の推定

先に(1.1)式で与えた形をもっと一般的にしてみると次のような式が得られる。これが一般の「線形回帰模型」である。

$$\begin{aligned} y_\alpha &= x_{\alpha 1} \beta_1 + x_{\alpha 2} \beta_2 + \dots \dots x_{\alpha i} \beta_i + \dots \dots + x_{\alpha p} \beta_p + e_\alpha \\ &(\alpha = 1, 2, 3, \dots \dots \dots N) \end{aligned} \quad (2.1)$$

ここで $\beta_1, \beta_2, \dots \dots, \beta_i, \dots \dots \beta_p$ はすべて母数であって実験中は一定の値をもつ未知の値であり, この値の推定が目的の一つである。

$x_{\alpha 1}, x_{\alpha 2}, \dots \dots x_{\alpha i}, \dots \dots x_{\alpha p}$ ($\alpha = 1 \dots \dots N$) は実験をする前に計画を立てたときに定まっている定数である。 y_α は実験の結果の観測値である。 e_α は誤差であって先に§ 1で述べた4つの条件, すなわち(1)独立性, (2)不偏性, (3)等分散性, (4)正規性が満足されているものとする。 α は実験の番号であって1より N までである。もし $N = p$ であれば $\beta_1, \beta_2, \dots \dots \beta_p$ は $y_1, y_2, \dots \dots y_N$ より一意に定まる筈であるが, 普通は N の方が p より大であるので通常連立一次方程式のとき方ではとくことができない。このとき§ 1でのべたと同様に残差の平方和を最小になるような形で $\beta_1, \beta_2, \dots \dots \beta_p$ を定めることができる。

(2.1)式をとく前に線形回帰式のいくつかの例をあげておこう。

(1) 母数が一定のとき。これは(1.1)式である。

$$y = \mu + e$$

これは $x_{\alpha 1} \equiv 1, \beta_1 = \mu$ とおけば(2.1)式となる。

(2) 1次式

$$y = a + bx + e$$

これは実験式などや予測などでよく表われる。

$$x_{\alpha 1} \equiv 1, \quad x_{\alpha 2} = x \quad \beta_1 = a, \quad \beta_2 = b$$

で与えられる。

(3) 2 次以上の多項式

$$x_{\alpha_1} = 1, \quad x_{\alpha_2} = x, \dots, \quad x_{\alpha_p} = x^n$$
$$\beta_1 = a_0, \quad \beta_2 = a_1, \dots, \quad \beta_p = a_n$$

とすれば

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + e$$

となって n 次式となる。このとき x_α の方は 2 次以上なので線形ではないが、母数 a_i についていえば線形なので線形回帰式である。すなわちここでいう線形は母数 a_i に関する 1 次式であることを示している。

(4) 重回帰式

独立変数が p 個あるとき

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p + e$$

これは (2.1) 式そのものである。

(5) 重回帰式で x について線形でないとき。

$$z = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c + e$$

$$y_\alpha = z, \quad x_{\alpha_1} = x^2, \quad x_{\alpha_2} = xy, \quad x_{\alpha_3} = y^2, \quad x_{\alpha_4} = x, \quad x_{\alpha_5} = y, \quad x_{\alpha_6} = 1$$

とすれば (2.1) ほもどる。

(6) さらに一般の式を含むとき。後でのべる直交多項式などもその一例である。

$$y = a_0 p_1(x) + a_2 p_2(x) + \dots + a_p p_p(x) + e$$

$p_i(x)$ に i 次の直交多項式を用いて多項式の推定を行うと計算がよりたやすく行われる。

(7) 調和解析

$$y = a_0 + a_1 c_1 px + a_2 c_1 p2x + \dots + b, \sin x + b_2 \sin 2x + \dots + e$$

$$x_{\alpha_1} = 1, \quad x_{\alpha_2} = c_1 px, \quad x_{\alpha_3} = \sin x, \quad x_{\alpha_4} = c_1 p2x, \quad x_{\alpha_5} = \sin 2x, \dots$$

とおけば週期現象の解析に用いられる調和解析法となる。

(8) 実験計画法

実験計画法の構造模型もやはり約形である。

一例をあげると

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij},$$

$$(i = 1, \dots, a)$$

$$(j = 1, \dots, b)$$

これは 2 元配置の母数模型と呼ばれる。2 つの条件によって測定値が定まるときの各母数をきめる方法である。

(2.1) 式を最小二乗法でとくことを考える。

$$y_\alpha = x_{\alpha_1} \hat{\beta}_1 + x_{\alpha_2} \hat{\beta}_2 + \dots + x_{\alpha_p} \hat{\beta}_p + e_\alpha$$

$$(\alpha = 1, \dots, N)$$

(2.2)

と書き表わせれば e_α は残差項となり、 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_p$ はそれぞれ $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ の推定値となる。ここで (1.7) (1.8) 式と同様にして残差平方和を Q とすれば

$$Q = \sum_{\alpha=1}^N e_{\alpha}^2$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N (y_{\alpha} - x_{\alpha 1} \hat{\beta}_1 - x_{\alpha 2} \hat{\beta}_2 - \dots - x_{\alpha p} \hat{\beta}_p)^2 \quad (2.3)$$

がえられる。これは常に正であるので最小値が存在する。この最小値を求めるために Q を $\hat{\beta}_i$ で偏微分したものをすべて 0 とおくことにより p 個の $\hat{\beta}_i$ に関する連立一次方程式を得る。

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}_i} = \sum_{\alpha=1}^N (y_{\alpha} - x_{\alpha 1} \hat{\beta}_1 - x_{\alpha 2} \hat{\beta}_2 - \dots - x_{\alpha p} \hat{\beta}_p) (-2 x_{\alpha i})$$

$$= -2 \sum_{\alpha=1}^N (y_{\alpha} - x_{\alpha 1} \hat{\beta}_1 - x_{\alpha 2} \hat{\beta}_2 - \dots - x_{\alpha p} \hat{\beta}_p) x_{\alpha i} \quad (2.4)$$

$$= -2 \sum_{\alpha=1}^N (y_{\alpha} x_{\alpha i} - x_{\alpha 1} x_{\alpha i} \hat{\beta}_1 - x_{\alpha 2} x_{\alpha i} \hat{\beta}_2 - \dots - x_{\alpha p} x_{\alpha i} \hat{\beta}_p)$$

$$(\alpha = 1 \dots N) \quad (i = 1 \dots p)$$

これより

$$\frac{\partial Q}{\partial \hat{\beta}_i} = 0 \quad (i = 1 \dots p) \quad (2.5)$$

をとけば

$$\sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha 1} x_{\alpha i} \hat{\beta}_1 + \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha 2} x_{\alpha i} \hat{\beta}_2 + \dots + \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha p} x_{\alpha i} \hat{\beta}_p = \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha} x_{\alpha i}$$

$$(i = 1 \dots p) \quad (2.6)$$

が得られる。ここで (2.2) 式と (2.6) 式を用いると

$$\sum_{\alpha=1}^N e_{\alpha} \cdot x_{\alpha i} = 0 \quad (2.7)$$

となる。また (2.6) 式において

$$\sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha i} x_{\alpha j} = \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha j} x_{\alpha i} = a_{ij} = a_{ji}$$

$$\left(\begin{array}{l} i = 1 \dots p \\ j = 1 \dots p \end{array} \right) \quad (2.8)$$

$$\sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha} \cdot x_{\alpha i} = \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha i} \cdot y_{\alpha} = B_i$$

$$(i = 1 \dots p) \quad (2.9)$$

とおけば

$$a_{i1} \hat{\beta}_1 + a_{i2} \hat{\beta}_2 + \dots + a_{ip} \hat{\beta}_p = B_i \quad (i = 1 \dots p) \quad (2.10)$$

が得られる。この式を (2.8) 式を用いて少し変形すれば

$$a_{i1} \hat{\beta}_1 + a_{i2} \hat{\beta}_2 + \dots + a_{ip} \hat{\beta}_p = B_i$$

$$(i = 1 \dots p) \quad (2.11)$$

となる。これをもっと省略すれば

$$\sum_{j=1}^p a_{ij} \hat{\beta}_j = B_i \quad (i = 1 \dots\dots p) \quad (2.12)$$

となる。(2.11)式をひろげた形で示すと

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \hat{\beta}_1 + a_{12} \hat{\beta}_2 + \dots\dots + a_{1j} \hat{\beta}_j + \dots\dots + a_{1p} \hat{\beta}_p &= B_1 \\ a_{21} \hat{\beta}_1 + a_{22} \hat{\beta}_2 + \dots\dots + a_{2j} \hat{\beta}_j + \dots\dots + a_{2p} \hat{\beta}_p &= B_2 \\ \vdots & \\ a_{i1} \hat{\beta}_1 + a_{i2} \hat{\beta}_2 + \dots\dots + a_{ij} \hat{\beta}_j + \dots\dots + a_{ip} \hat{\beta}_p &= B_i \\ \vdots & \\ a_{p1} \hat{\beta}_1 + a_{p2} \hat{\beta}_2 + \dots\dots + a_{pj} \hat{\beta}_j + \dots\dots + a_{pp} \hat{\beta}_p &= B_p \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

となる。これは p 元の連立一次方程式である。この式を正規方程式という。

(2.13)式をといて

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= C_{11} B_1 + C_{12} B_2 + \dots\dots + C_{1p} B_p \\ \hat{\beta}_2 &= C_{21} B_1 + C_{22} B_2 + \dots\dots + C_{2p} B_p \\ \hat{\beta}_p &= C_{p1} B_1 + C_{p2} B_2 + \dots\dots + C_{pp} B_p \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

の如くに $\hat{\beta}_i$ を $B_1, B_2, \dots\dots B_p$ の 1 次結合の式として表わすことが可能である。ここで C_{ij} は a_{ij} から定まる定数である。

以上述べたことを行列を用いて表現するともっと簡単な形となる。

§ 3 行列による表現

2 節にある式をもっと簡単に表現するために行列が用いられる。

§ 2 にある式を行列によって表現するために次のような行列を考える。まず x_j より作られる行列を X とする。以下 Y, B, β, A, C, e を次のように表わす。

$$(N \times P) \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots\dots & x_{1j} & \dots\dots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \dots\dots & x_{2j} & \dots\dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{a1} & x_{a2} & \dots\dots & x_{aj} & \dots\dots & x_{ap} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \dots\dots & x_{Nj} & \dots\dots & x_{NP} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$(N \times 1) \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_j \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\begin{matrix} (P \times 1) \\ B = \end{matrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_p \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\begin{matrix} (P \times 1) \\ \beta = \end{matrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\begin{matrix} (P \times P) \\ A = \end{matrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pj} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{matrix} (P \times P) \\ C = \end{matrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1j} & \cdots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2j} & \cdots & C_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{i1} & C_{i2} & \cdots & C_{ij} & \cdots & C_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{p1} & C_{p2} & \cdots & C_{pj} & \cdots & C_{pp} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{matrix} (N \times 1) \\ e = \end{matrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_N \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

これよりまず (2.1) 式を表わせば

$$\begin{matrix} (N \times 1) \\ Y \end{matrix} = \begin{matrix} (N \times P) \\ X \end{matrix} \cdot \begin{matrix} (P \times 1) \\ \beta \end{matrix} + \begin{matrix} (N \times 1) \\ e \end{matrix} \quad (3.8)$$

すなわち行列の乗算を用いれば Y の第 1 行目の値 y_1 は X の第 1 行目と β との積と e_1 との和で示される。

$$y_1 = (x_{11} \ x_{12} \ \cdots \ x_{1j} \ \cdots \ x_{1p}) \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_j \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} + e_1 \quad (3.9)$$

$$= x_{11} \beta_1 + x_{12} \beta_2 + \cdots + x_{ij} \beta_j + \cdots + x_{1p} \beta_p + e_1$$

一般に Y の第 α 行目の値 y_α は X の第 α 行目と β との積と e_α との和で示される。すなわち、

$$y_\alpha = (x_{\alpha 1} \ x_{\alpha 2} \ \cdots \ x_{\alpha p}) \times \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} \times e_\alpha \quad (3.10)$$

$$= x_{\alpha 1} \beta_1 + x_{\alpha 2} \beta_2 + x_{\alpha p} \beta_p + e_\alpha$$

これは (2.1) に等しい。また推定量を代入することによって

$$Y = X \hat{\beta} + e \quad (3.11)$$

が得られる。これをといた結果の式 (2.6) 式は

$$X' X \hat{\beta} = X' \cdot Y \quad (3.12)$$

と表わせる。ここで X' は X の行と列を交換したもので X の転置行列である。(2.8)(2.9)式を用いれば

$$X' X = A \quad (3.13)$$

$$X' Y = B \quad (3.14)$$

が得られる。これにより (3.12) 式は

$$A \hat{\beta} = B \quad (3.15)$$

となる。 A が正則行列、すなわち A の行列式 $|A|$ が 0 でないならば逆行列が存在して

$$\begin{aligned} \beta &= A^{-1} \cdot B \\ &= C \cdot B \end{aligned} \quad (3.16)$$

が (2.14) 式を用いて得られる。

(3.12) 式、(3.15) 式は前述の正規方程式である。結局 β_i の推定は正規方程式の解法に帰着するのである。

この解き方はプログラムの方で説明をするので参照されたい。

§ 4 最小二乗推定の性質

線形推定の場合前述の誤差に関する 4 条件が満されている場合には最小二乗法による解は次の性質を有する。

(1) $\hat{\beta}_i$ は β_i に関する不偏推定である。

$$E(\hat{\beta}_i) = \beta_i \quad (4.1)$$

すなわち偏りがないので β_i の正しい値のまわりにバラツクことを示す。そのバラツキに関する

性質としては

(2) $\hat{\beta}_i$ は β_i に関する不偏推定のうちでは分散が最小のものである。もし正規性の仮定がないときには $\hat{\beta}_i$ は不偏の線形推定量のうちで分散が最小のものである。分散が最小であるのはバラツキが最も小さいことであり推定の精度が良いことを示す。

このように β_i に関する良い推定であることがわかる。また

$$\theta = l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2 + \dots + l_p \beta_p$$

で与えられる θ の β のところに $\hat{\beta}$ を入れた

$$\hat{\theta} = l_1 \hat{\beta}_1 + l_2 \hat{\beta}_2 + \dots + l_p \hat{\beta}_p$$

で与えられる $\hat{\theta}$ は θ に関する不偏最小分散推定量である。これも結合した母散の推定量を出すのに便利である。

§5 残差平方和

(2.3) 式の Q の $\hat{\beta}_i$ の所に最小二乗法で求めた値を代入したものを S_E とすると S_E は

$$\begin{aligned} S_E &= \sum_{\alpha=1}^N \{ y_{\alpha} - (x_{\alpha 1} \hat{\beta}_1 + x_{\alpha 2} \hat{\beta}_2 + \dots + x_{\alpha p} \hat{\beta}_p) \}^2 \\ &= \sum_{i=1}^N y_i^2 - \hat{\beta}_1 B_1 - \hat{\beta}_2 B_2 - \dots - \hat{\beta}_p B_p \end{aligned} \quad (5.1)$$

で表わせる。この残差平方和は σ^2 の ϕ_E 倍の値をもつ。ここで ϕ_E は

$$\phi_E = N - p \quad (5.2)$$

で与えられ自由度と呼ばれている。

$$\begin{aligned} E(S_E) &= (N - p) \cdot \sigma^2 \\ &= \phi_E \cdot \sigma^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

である。よって

$$E\left(\frac{S_E}{\phi_E}\right) = \sigma^2 \quad (5.4)$$

であるので S_E/ϕ_E を不偏分散といい V_E で表わす。

また (2.14) 式, (3.6) 式にでてくる C_{ij} については

$$\left. \begin{aligned} D^2(\hat{\beta}_i) &= C_{ii} \sigma^2 \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j) &= C_{ij} \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

などが成立する。Cov(x, y) は x と y の共分散である。

(5.4) 式より σ^2 の推定量として S_E/ϕ_E を用いることが多い。すなわち

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S_E}{\phi_E} \quad (5.6)$$

これを1節で求めた値で求めてみると

$$S_E = 1030$$

$$\phi_E = 5 - 1 = 4$$

よって

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1030}{4} = 257.5$$

が得られる。

§ 6 信頼区間

母数の真の値はわからないが推定量が不偏であることと、また分散の推定量もわかっていることを用いて母数の値のある範囲を確率的に定めることができる。

統計量 x が $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき x の値は $(\mu - 1.96\sigma, \mu + 1.96\sigma)$ の間に確率95%で入ることが理論的に証明されている。また逆に母数 μ の値も $(x - 1.96\sigma, x + 1.96\sigma)$ の間に95%の確率で存在することがわかる。

この範囲を95%信頼区間といい、 $x - 1.96\sigma$ の方を下限、 $x + 1.96\sigma$ の方を上限という。

標準偏差 σ が不明でその推定量 $\hat{\sigma}$ がわかっているときは係数1.96のかわりに t 分布表の値 $t(\phi, 0.05)$ が用いられる。この値は巻末の表になっている。

例 1節で用いた例をとる。 μ の推定量として $\bar{y}$ をとる。一般に y が $N(\mu, \sigma^2)$ に属しているとき n 個の平均 $\bar{y}$ は $N(\mu, \sigma^2/n)$ に属することがしれている。

例題より

$$\begin{aligned}\bar{y} &= 54 \\ \hat{\sigma}^2 &= 257.4 \\ n &= 5\end{aligned}\tag{6.1}$$

よって μ の95%信頼区間は

$$54 \pm t(4, 0.05) \cdot \sqrt{\frac{257.4}{5}}\tag{6.2}$$

で与えられる。ここで $t(4, 0.05) = 2.776$ よって

$$\begin{aligned}&54 \pm 2.776 \times 7.175 \\ &= 54 \pm 19.9 \\ &= 33.1 \sim 73.9\end{aligned}$$

が μ の95%信頼区間である。すなわち μ の真の値がこの間に入っている確率が95%であるということになる。

同様に $\hat{\beta}_i$ の場合も $\hat{\beta}_i$ が正規分布で $N(\beta_i, C_{ii} \sigma^2)$ に従うことがわかっていることを利用すれば、(5.5)式を用いて $\hat{\beta}_i$ の信頼度 $(1-\alpha)$ の区間は $t(\phi_E, \alpha)$ を自由度 ϕ_E の t 分布の α 点として

$$\hat{\beta}_i \pm t(\phi_E, \alpha) \sqrt{C_{ii} V_E}\tag{6.3}$$

で与えられる。ただし、 $V_E = S_E / \phi_E$ である。

$\hat{\beta}_i$ は $y_1, y_2, \dots, y_N$ の 1 次式であるので正規分布をすることがわかる。

また、

$$\theta = l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2 \quad (6.4)$$

の推定式は

$$\hat{\theta} = l_1 \hat{\beta}_1 + l_2 \hat{\beta}_2 \quad (6.5)$$

であるが、この分散は

$$\begin{aligned} D^2(\hat{\theta}) &= l_1^2 D^2(\hat{\beta}_1) + 2 l_1 l_2 \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) + l_2^2 D^2(\hat{\beta}_2) \\ &= l_1^2 C_{11} \sigma^2 + 2 l_1 l_2 C_{12} \sigma^2 + l_2^2 C_{22} \sigma^2 \\ &= (l_1^2 C_{11} + 2 l_1 l_2 C_{12} + l_2^2 C_{22}) \cdot \sigma^2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

であるのでその信頼度 $(1-\alpha)$ の区間は

$$\hat{\theta} \pm t(\phi_E, \alpha) \sqrt{l_1^2 C_{11} + 2 l_1 l_2 C_{12} + l_2^2 C_{22}} \cdot \sqrt{V_E} \quad (6.7)$$

で与えられる。

§ 7 線形回帰式の解き方

(1) X 表を作る。

表 8.1 X 表

β_1	β_2		β_p	$\tau - \tau$
x_{11}	x_{12}		x_{1p}	y_1
x_{21}	x_{22}		x_{2p}	y_2
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
x_{N1}	x_{N2}		x_{Np}	y_N

〔注〕 計算機にかけるときでもこの表を作っておくことが必要である。 x_{ai} はあらかじめ与えてある数字であり、 y_a は実験の後に求められる観測値である。これらはカードにパンチされている結果を出すときも表としてプリントしておく方が良い。

(2) A 表を作る。

表 8.2 A 表

$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$		$\hat{\beta}_p$	$= B$
a_{11}	a_{12}		a_{1p}	B_1
a_{21}	a_{22}		a_{2p}	B_2
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
a_{p1}	a_{p2}		a_{pp}	B_p

$$a_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha i} x_{\alpha j} = a_{ji} \quad (i = 1 \dots\dots\dots p, \quad j = 1 \dots\dots\dots p) \quad (7.1)$$

$$B_i = \sum_{\alpha=1}^N x_{\alpha i} y_{\alpha} \quad (i = 1 \dots\dots\dots p) \quad (7.2)$$

(7.1) 式はもっと丁寧に書くと

$$a_{ij} = x_{1i} x_{1j} + x_{2i} x_{2j} + \dots\dots\dots + x_{Ni} x_{Nj} \\ (i \leq j, \quad i = 1 \dots\dots\dots p, \quad j = 1 \dots\dots\dots p)$$

であり、さらにいえば

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= x_{11}^2 + x_{21}^2 + \dots\dots\dots + x_{N1}^2 \\ a_{12} &= x_{11} x_{12} + x_{21} x_{22} + \dots\dots\dots + x_{N1} x_{N2} \\ &\vdots \\ a_{pp} &= x_{1p}^2 + x_{2p}^2 + \dots\dots\dots + x_{Np}^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

また(7.2)式は

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= x_{11} y_1 + x_{21} y_2 + \dots\dots\dots + x_{N1} y_N \\ &\vdots \\ B_p &= x_{1p} y_1 + x_{2p} y_2 + \dots\dots\dots + x_{Np} y_N \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

以下これを具体的に解くことになるが、この解法はプログラムの方を参照されたい。すなわち消去法(掃き出し法)による解き方を示してある。

§ 8 母数に無駄のあるとき

今まで述べてきたものでは行列 A が正則である。すなわち $|A| \neq 0$ でない場合であった。これは回帰直線または回帰曲線の推定に当っては大体条件を満足しているが、分散分析などのような場合に母数の推定を行うときにはこれは不十分である。というのはこのときには A が特異であって $|A| = 0$ の場合がしばしば生ずるからである。このようなときには解は一意には決定されない。

すなわち未知数の数(母数の数)よりも方程式の個数の方が少ないことになる。このようなときには実は母数の方にムダがあるわけで、もっと少ない個数の母数で構造式が書き表わされることになる。

すなわち $|A| = 0$ の場合ならば母数の間には1次従属な関係がある筈であるので

$$l_1 \beta_1 + l_2 \beta_2 + \dots\dots\dots + l_p \beta_p = 0 \quad (8.1)$$

のような制約条件が必ず得られる。これよりたとえば

$$\beta_p = - \left(\frac{l_1}{l_p} \beta_1 + \frac{l_2}{l_p} \beta_2 + \dots\dots\dots + \frac{l_{p-1}}{l_p} \beta_{p-1} \right) \quad (8.2)$$

のごとくして β_p を残りの $\beta_1 \dots \beta_{p-1}$ によって表現することが可能となる。すなわち母数の数を 1 個減ずることができる。このようにしてもし行列 A の位数が $p - b$ であれば b 個の条件式を作ることができ母数の数を $p - b$ 個にすることができるので解くことが可能になり解は一意に確定する。

このような方法のかわりに適当な条件をつけることによって解を確定する方法がある。この場合の条件は正規方程式に対して矛盾を生じない限りは任意である。この方法の方が一般に前の方法よりも容易である。このようにして解を確定したときでもある種の母数の 1 次式の推定はこれらの条件に無関係に確定することが可能である。これらの母数の 1 次式を推定可能であるという。推定可能な母数の 1 次式は次のようなものである。

各データの期待値に任意の係数をかけて合成される母数の 1 次式は推定可能である。

逆に上の条件をみたさない母数の 1 次式は推定可能ではない。すなわち附加条件の形によって値が異なってくる。

さて適当な任意の条件をつけ加える方法を用いるときには X 表、 A 表は前に述べたと同じ方法で作し、 A 表の所で適当な条件をつけ加えることによってとくことができる。このようにしても残差平方和の値とか信頼区間の中などは同じに得られる。ただ残差平方和の自由度が附加した条件の数だけ増すことになる。すなわち

$$\phi_E = N - p + b \quad (8.3)$$

ただし、 b は附加条件の数である。

例： 重さが β_1, β_2 なる 2 個の物体を常に同じ左の皿にのせて N 回測定したとする。

このとき測定の誤差を e_α とすれば測定値 y_α は

$$y_\alpha = \beta_1 + \beta_2 + e_\alpha \quad (\alpha = 1 \dots \dots \dots N) \quad (8.4)$$

表 8.1 X 表

β_1	β_2	デ-タ
1	1	y_1
1	1	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	y_N

表 8.2 A 表

$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$= 1$
N	N	$\sum y_\alpha$
N	N	$\sum y_\alpha$

で表わされる。このとき X 表、 A 表は表 8.1、表 8.2 のようになる。このとき A 表より作られる正規方程式は

$$\left. \begin{aligned} N\hat{\beta}_1 + N\hat{\beta}_2 &= \sum_{\alpha=1}^N y_\alpha \\ N\hat{\beta}_1 + N\hat{\beta}_2 &= \sum_{\alpha=1}^N y_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

であり2つの方程式は完全に同一であり適当に整理すれば1つの方程式となる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 &= \bar{y} \\ \bar{y} &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

ここで条件として $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2$ 以外の任意のものを採用するとする。たとえば

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= 0, & \hat{\beta}_2 &= \bar{y} \\ \hat{\beta}_1 &= \bar{y}, & \hat{\beta}_2 &= 0 \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{1}{2} \bar{y}, & \hat{\beta}_2 &= \frac{1}{2} \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

など任意に作ることができる。ここで条件に無関係に不変なものとしては(8.4)式より

$$E(y_{\alpha}) = \beta_1 + \beta_2 \quad (\alpha = 1 \cdots \cdots N) \quad (8.8)$$

であるので $\beta_1 + \beta_2$ が推定可能な1次式である。すなわち β_1, β_2 と2個の母数があるが実質的には $\beta_1 + \beta_2 = \beta_0$ として β_0 のみを母数と考えれば良い。しかし目的によっては制約条件をつける方が便利である。たとえば

$$\beta_1 - \beta_2 = 0 \quad (8.9)$$

これは $\beta_1 = \beta_2$ と同じ条件であるがこれを用いれば

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{2} \bar{y}, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{1}{2} \bar{y} \quad (8.10)$$

が得られる。このときA表の方は次のようになる。

表 8. 3 A 表

行	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	= 1
(1)	N	N	$B_1 = \sum y_{\alpha}$
(2)	N	N	$B_2 = \sum y_{\alpha}$
(3)	1	-1	0

(1), (2)行は前と同じ, (3)は附加条件である。

これをといてみる。

$$\begin{aligned} \{ (1) \text{行} / N + (3) \text{行} \} / 2 & \quad \text{を第(4)行に} \\ \{ (2) \text{行} / N - (3) \text{行} \} / 2 & \quad \text{を第(5)行にする。} \end{aligned}$$

(4)	1	0	$B_1 / 2N = \bar{y} / 2$
(5)	0	1	$B_2 / 2N = \bar{y} / 2$

これより

$$\hat{\beta}_1 = \frac{1}{2} \bar{y}, \quad \hat{\beta}_2 = \frac{1}{2} \bar{y} \quad (8.11)$$

が得られる。この場合 C 表を作れば

表 8.4 C 表

	B_1	B_2
$\hat{\beta}_1$	$1/2N$	0
$\hat{\beta}_2$	0	$1/2N$

これより

$$\left. \begin{aligned} E(\hat{\beta}_1) &= \beta_1 \\ E(\hat{\beta}_2) &= \beta_2 \\ D^2(\hat{\beta}_1) &= \frac{1}{2N} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_2) &= \frac{1}{2N} \sigma^2 \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

が得られる。しかしこれらの値は附加条件によって変わることには注意する必要がある。

$$\left. \begin{aligned} E(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) &= \beta_1 + \beta_2 \\ D^2(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) &= \left(\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} \right) \sigma^2 \\ &= \frac{1}{N} \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (8.13)$$

であるがこの値は附加条件が何になっても変化しない値である。すなわち推定可能の値である。これはもし条件として一般に

$$C_1 \beta_1 + C_2 \beta_2 = 0 \quad (8.14)$$

を採用して前と同じに解いてみると

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_1 &= \frac{C_2}{C_2 - C_1} \frac{B_1}{N} = \frac{C_2}{C_2 - C_1} \bar{y} \\ \hat{\beta}_2 &= \frac{C_1}{C_1 - C_2} \frac{B_2}{N} = \frac{C_1}{C_1 - C_2} \bar{y} \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

$$\left. \begin{aligned} E(\hat{\beta}_1) &= \beta_1 \\ D^2(\hat{\beta}_1) &= \frac{C_2}{C_2 - C_1} \frac{1}{N} \sigma^2 \\ E(\hat{\beta}_2) &= \beta_2 \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

$$D^2(\hat{\beta}_2) = \frac{C_1}{C_1 - C_2} \cdot \frac{1}{N} \sigma^2$$

$$\text{Cov}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = 0$$

$$\begin{aligned} D^2(\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2) &= \frac{C_2}{C_2 - C_1} \cdot \frac{1}{N} \sigma^2 + \frac{C_1}{C_1 - C_2} \cdot \frac{1}{N} \sigma^2 \\ &= \frac{C_2 - C_1}{C_2 - C_1} \cdot \frac{1}{N} \sigma^2 = \frac{1}{N} \sigma^2 \end{aligned}$$

(8.17)

すなわち $\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2$ は C_1, C_2 の如何にかかわらず $1/N \cdot \sigma^2$ の分散をもっている。一方 $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2$ の方は C_1, C_2 の値によって分散が異ってくる。

残差平方和 S_E については

$$S_E = \sum_{a=1}^N y_a^2 - \hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_2 \hat{\beta}_1$$

$$= \sum_{a=1}^N y_a^2 - \frac{C_2}{C_2 - C_1} N \bar{y}^2 - \frac{C_1}{C_1 - C_2} N \bar{y}^2$$

$$= \sum_{a=1}^N y_a^2 - \frac{C_2 - C_1}{C_2 - C_1} N \bar{y}^2$$

$$= \sum_{a=1}^N y_a^2 - N \bar{y}^2$$

(8.18)

これは C_1, C_2 の如何にかかわらず成立する。すなわち残差平方和には影響がない。これは一般的に証明が可能である。

このように附加条件をつけるとき方は推定可能な1次式の値および残差平方和については常に一定な値を与えてくれるので適当な形をつけ加えることにより解法を容易にすることができる。

以上述べてきたことの実例として回帰式をとくこと、および分散分析などの説明を行うことにしよう。

第 2 章 回 帰 分 析

§ 1 単純な平均

すでに第 1 章でも示してあるが、ここでは前章の形に従って形式的に解くことにする。

構造式

$$y_{\alpha} = \mu + e_{\alpha} \quad (\alpha = 1 \dots N) \quad (1.1)$$

μ : 母数 (一定の値)

$$e_{\alpha} \sim NID(0, \sigma^2)$$

X 表

μ	デ-タ
1	y_1
1	y_2
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
1	y_N

A 表

$\hat{\mu}$	$= 1$
N	$\sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha} = B_1$

C 表

1	$= B_1$
$\hat{\mu}$	$\frac{1}{N}$

$$a_{11} = 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2$$

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha}$$

$$B_1 = 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + \dots + 1 \cdot y_N$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha}$$

$$D^2(\hat{\mu}) = \frac{1}{N} \sigma^2$$

残差平方和 S_E

$$S_E = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_N^2 - \mu \cdot B_1$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha}^2 - \frac{1}{N} B_1^2$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha}^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha} \right)^2$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N (y_{\alpha} - \bar{y})^2$$

μ に対する信頼度 $1 - \alpha$ の信頼区間は

$$\mu : \bar{y} \pm t(\phi_E, \alpha) \cdot \sqrt{\frac{S_E}{N-1} \cdot \frac{1}{N}} \quad (1.2)$$

である。これに第 1 章・第 1 節の数値例を入れて計算すると

$$\bar{y} = 5.4,$$

$$\phi_E = N - 1 = 5 - 1 = 4$$

$$\alpha = 5 \%$$

$$S_E = 1030$$

よって

$$\begin{aligned} \mu &: 54 \pm t(4, 0.05) \cdot \sqrt{\frac{1030}{4} \cdot \frac{1}{5}} \\ &= 54 \pm 2.776 \times \sqrt{51.5} \\ &= 54 \pm 19.9 \\ &= 34.1 \sim 73.9 \end{aligned}$$

§ 2 原点を通る直線

理論的に原点を通ることがわかっているとき、たとえばオーム法則における抵抗の如く

$$E = R \cdot I \quad (21)$$

E は電圧、 R は抵抗、 I は電流であって I を種々にかえてそのときの E を読んで、 R の値を求めようというような場合である。このときの構造式は

$$y_a = \beta \cdot x_a + e_a \quad (\alpha = 1 \dots N) \quad (22)$$

で示される。これを解くと

X 表		A 表		C 表	
β	データ	$\hat{\beta}$	$= 1$	1	$= B_1$
x_1	y_1	$\sum_{\alpha=1}^N x_a^2$	$\sum_{\alpha=1}^N x_a y_a$	$\hat{\beta}$	$\sum x_a^2$
x_2	y_2				
$\vdots$					
x_N	y_N				

$$a_{11} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N x_a^2$$

$$B_1 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_N y_N \quad (23)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N x_a \cdot y_a$$

$$C_{11} = \frac{1}{\sum x_a^2}$$

これより β の推定値 $\hat{\beta}$ については

$$\hat{\beta} = C_{11} \cdot B_1 = \frac{1}{\sum x_a^2} \sum x_a y_a \quad (24)$$

よって

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

$$D^2(\hat{\beta}) = \frac{1}{\sum x_a^2} \sigma^2 \quad (25)$$

$$S_E = \sum y_a^2 - \hat{\beta} \cdot B_1$$

$$= \sum y_a^2 - \frac{1}{\sum x_a^2} (\sum x_a y_a)^2 \quad (26)$$

$$\phi_E = N - p = N - 1$$

よって β の 95 % の信頼 或は

$$\beta : \frac{\sum x_a y_a}{\sum x_a^2} \pm t(N-1, 0.05) \cdot \sqrt{\frac{V_E}{\sum x_a^2}} \quad (27)$$

$$V_E = \frac{S_E}{N-1}$$

となる。もし β の信頼区間が 0 を含まなければ β は有意であって、誤差では説明できない程度に大きな値をもっていることがわかる。

§ 3 一般の一次式

条件 x_i のもとで測定さして y_i をえたとき y_i が x_i の 1 次式として示されんとする。その構造式としては次のような形を考える。

$$y_i = \alpha + \beta x_i + e_i \quad (31)$$

$$(i = 1 \dots N)$$

すなわち、 x_i に対しては y_i が、 x_i に対しては y_i が与えられる訳である。そのとき x_i の方は実験で決定される固定した値であり、 e_i の方は $NID(0, \sigma^2)$ に従うものとし、 α 、 β なる母数を推定するのが目的である。

さて (3.1) 式のとき次のような変形が便利である。

$$\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \quad (32)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

を用いて

$$y_i = \alpha' + \beta'(x_i - \bar{x}) + e_i \quad (33)$$

$$(i = 1 \dots N)$$

で計算を行ってみる。まず X 表を作る。

X 表

α'	β'	デ-タ
1	$x_1 - \bar{x}$	y_1
1	$x_2 - \bar{x}$	y_2
1	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$x_i - \bar{x}$	y_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$x_N - \bar{x}$	y_N

これより A 表を作る。

A 表

$\hat{\alpha}'$	$\hat{\beta}'$	$= B$
N	0	$\sum_i y_i$
0	$\sum (x_i - \bar{x})^2$	$\sum (x_i - \bar{x}) \cdot y_i$

ここで

$$a_{11} = 1^2 + 1^2 + \dots + 1^2 = N$$

$$a_{12} = a_{21}$$

$$= 1 \cdot (x_1 - \bar{x}) + 1 \cdot (x_2 - \bar{x}) + \dots + 1 \cdot (x_N - \bar{x})$$

$$= \sum x_i - N \bar{x} = 0$$

$$a_{22} = (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_N - \bar{x})^2$$

$$= \sum (x_i - \bar{x})^2$$

$$B_1 = 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + \dots + 1 \cdot y_N \quad (3.4)$$

$$= y_1 + y_2 + \dots + y_N$$

$$= \sum y_i = N \bar{y}$$

$$B_2 = (x_1 - \bar{x}) y_1 + (x_2 - \bar{x}) y_2 + \dots + (x_N - \bar{x}) y_N$$

$$= (x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x}) y_2 + \dots + (x_N - \bar{x})(y_N - \bar{y})$$

$$+ (x_1 - \bar{x}) \bar{y} + (x_2 - \bar{x}) \bar{y} + \dots + (x_N - \bar{x}) \bar{y}$$

$$= \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

ここで

$$S_x = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

$$S_y = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$$

$$S_{xy} = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

とおく。A表は次のようになる。

A 表		
$\hat{\alpha}'$	$\hat{\beta}'$	$= B$
N	0	$N\bar{y}$
0	S_x	S_{xy}

これを用いてC表を作れば次のようになる。

C 表		
1	B_1	B_2
$\hat{\alpha}'$	$\frac{1}{N}$	0
$\hat{\beta}'$	0	$\frac{1}{S_x} = \frac{1}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

これより

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}' &= \frac{1}{N} N \bar{y} = \bar{y} \\ \hat{\beta}' &= \frac{S_{xy}}{S_x} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

(3.1)式と(3.3)式を比較すると(3.3)式より

$$\begin{aligned} y_i &= \alpha' - \beta' \bar{x} + \beta' x_i + e_i \\ &= \alpha + \beta x_i + e_i \end{aligned} \quad (3.7)$$

よって

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' - \beta' \bar{x} \\ \beta &= \beta' \end{aligned} \quad (3.8)$$

が得られる。あるいは推定値の形にして

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \hat{\alpha}' - \hat{\beta}' \bar{x} = \bar{y} - \hat{\beta}' \bar{x} \\ \hat{\beta} &= \hat{\beta}'\end{aligned}\tag{3.9}$$

が得られる。

□表を用いて

$$D^2(\hat{\alpha}') = \frac{1}{N} \sigma^2\tag{3.10}$$

$$D^2(\hat{\beta}') = \frac{1}{S_x} \sigma^2$$

$$C_{ov}(\hat{\alpha}', \hat{\beta}') = 0$$

$$\begin{aligned}S_E &= \sum_{i=1}^N y_i^2 - \hat{\alpha}' B_1 - \hat{\beta}' B_2 \\ &= \sum_{i=1}^N y_i^2 - \frac{1}{N} (\sum y_i)^2 - \frac{1}{S_x} (S_{xy})^2 \\ &= S_y - \frac{1}{S_x} (S_{xy})^2\end{aligned}\tag{3.11}$$

よって β の信頼度 95 % の信頼区間は β' のそれと同じであって

$$\beta : \hat{\beta} \pm t(\phi_E, 0.05) \sqrt{\frac{V_E}{S_x}}\tag{3.12}$$

である。ただし ϕ_E は $p=2$ なので

$$\phi_E = N - 2\tag{3.13}$$

である。また

$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E}\tag{3.14}$$

であることは当然である。

ここで β が 0 であるかどうかをしらべるために通常次のような方法が用いられる。この理論については第 4 章の分散分析の所を参照されたい。これは検定と呼ばれる統計的方法の 1 種である。

表 3.1 分散分析表

要 因	平 方 和	自 由 度	不 偏 分 数	分 散 比	F の 値
回帰にもと づく成分 (β に關係 する)	S_R $\left(= \frac{(S_{xy})^2}{S_x} \right)$	1	V_R $\left(= \frac{S_R}{1} \right)$	$F_0 = \frac{V_R}{V_E}$	$F_{\phi_E}^1 (0.05)$
回帰からの 成分 (誤差に關 係する)	S_E $(= S_y - S_R)$	ϕ_E $(= N - 2)$	V_E $(= \frac{S_E}{\phi_E})$		
計	$S_T (= S_y)$	$N - 1$			

有意水準 5 % で検定するためには分散比 F_0 と F 表 (後部数表) との比を比較する必要がある。

数 値 例

表 3.2 データ

x_i	y_i	計 算 値	残 差	95 % 信頼区間
1.0	2.7	2.38	+0.32	6.24 ~ -1.48
2.0	3.5	4.11	-0.61	6.84 ~ 1.38
3.0	5.0	5.84	-0.64	8.07 ~ 3.61
4.0	9.8	7.57	+2.23	10.30 ~ 4.84
5.0	8.2	9.30	-1.01	13.16 ~ 5.44

上のようなデータが (x_i, y_i) の組として与えられている。このとき前述の式に従って計算を行ってみる。この式は

$$\begin{aligned} y_i &= 2x_i + e_i & (i = 1 \dots 5) \\ e_i &\sim NID(0, 1) \end{aligned} \quad (3.15)$$

より作ったもので図 3-1 で理論式とあるのがそれである。計算式とあるのは x_i, y_i の組より計算したものである。

(3.6)式を用いて

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}' &= \bar{y} = 5.84 \\ \hat{\beta}' &= \frac{S_{xy}}{S_x} = \frac{17.3}{10} = 1.73 \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

(3.9)式を用いて

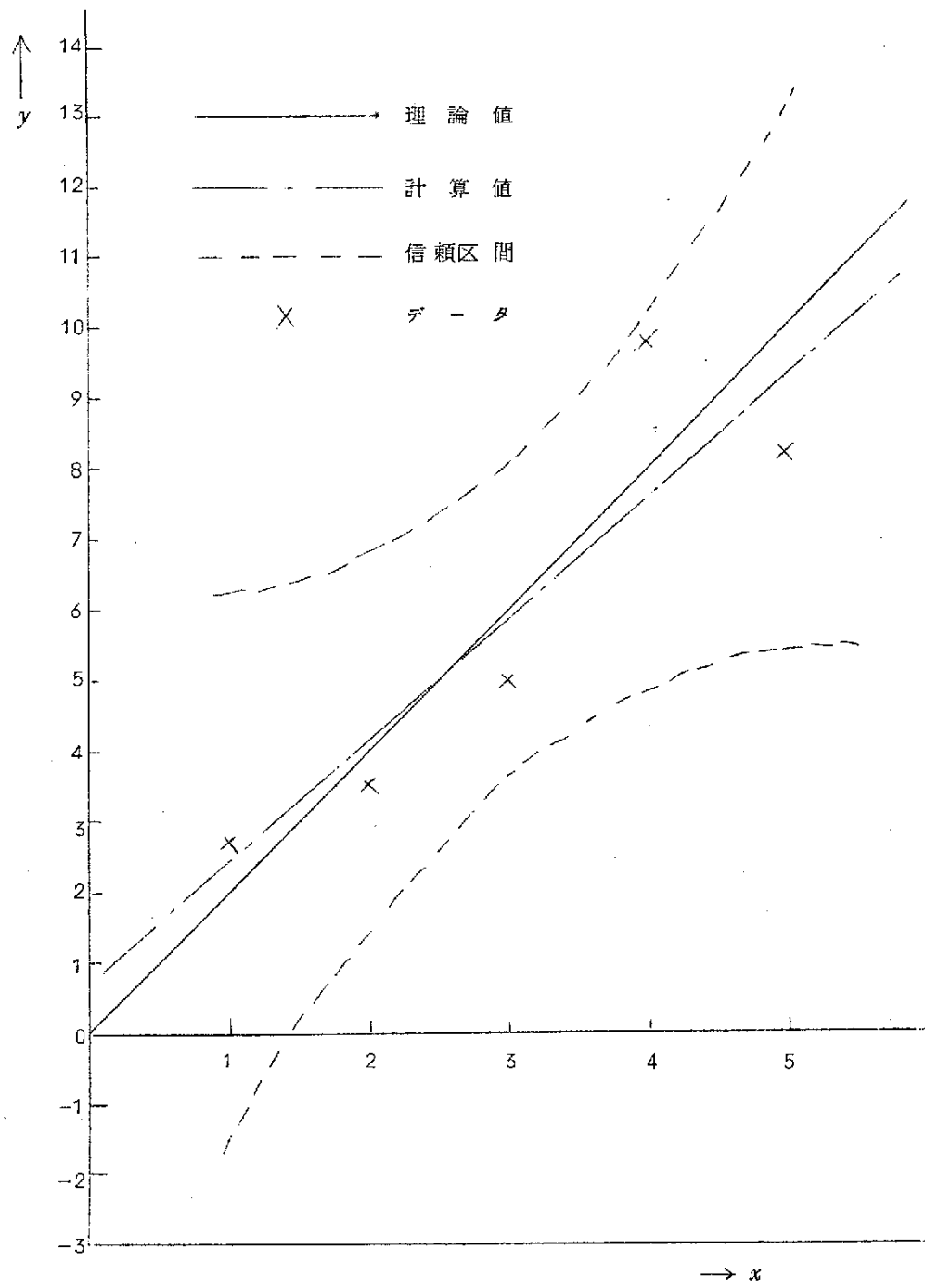


図 3.1 直線のあてはめ

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha} &= \bar{y} - \hat{\beta}' \bar{x} \\
 &= 5.84 - 1.73 \times 3 \\
 &= 0.65 \\
 \hat{\beta} &= \hat{\beta}' = 1.73
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

(3.11) 式を用いて

$$\begin{aligned}
 S_E &= S_y - \frac{1}{S_x} (S_{xy})^2 \\
 &= 37.292 - \frac{1}{10} (17.3)^2 \\
 &= 7.363
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

(3.12) 式によって

$$\begin{aligned}
 \beta : \hat{\beta} \pm t(\phi_E, 0.05) \sqrt{\frac{V_E}{S_x}} \\
 &= 1.73 \pm t(3, 0.05) \sqrt{\frac{2.454}{10}} \\
 &= 1.73 \pm 3.182 \sqrt{0.2454} \\
 &= 1.73 \pm 1.58 \\
 &= 0.15 \sim 3.31
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 \phi_E &= 5 - 2 = 3 \\
 V_E &= \frac{S_E}{\phi_E} = \frac{7.363}{3} = 2.454
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

表 3.2 分散分析表

要 因	平 方 和	自 由 度	不 偏 分 数	分 散 比	F (0.05)
回 帰	29.929	1	29.929	12.2※	10.1
誤 差	7.363	3	2.454		
計	37.292	4			

すなわち回帰にもとづく成分は5%有意水準で有意であるので1次成分の存在が確かである。

なお(3.3), (3.10)式を用いて

$$\begin{aligned}
 D^2(y_i) &= D^2(\hat{\alpha}) + (x_i - \bar{x})^2 D_1(\hat{\beta}') \\
 &\quad + 2(x_i - \bar{x}) C_{ov}(\hat{\alpha}', \hat{\beta}') \\
 &= \frac{1}{N} \sigma^2 + (x_i - \bar{x})^2 \frac{1}{S_x} \sigma^2
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

が得られる。これに数字を代入すれば, $x = x_i$ のところでの分散の値は

$$\left\{ \frac{1}{5} + (x_i - 3)^2 \frac{1}{10} \right\} \sigma^2 \tag{3.22}$$

よって $x_i = 3$ のときが最小で両側にいくにつれて大となる。95 % 信頼区間 w_i は表の如くなる。

x_i	$D^2(y_i)/\sigma^2$	w_i
1	$3/5 = 0.6$	3.86
2	$3/10 = 0.3$	2.73
3	$1/5 = 0.2$	2.23
4	$3/10 = 0.3$	2.73
5	$3/5 = 0.6$	3.86

ここで

$$\begin{aligned}
 w_i &= t(\phi_E, 0.05) \sqrt{V_E \cdot D^2(y_i)/\sigma^2} \\
 &= t(3, 0.05) \sqrt{2.454 \cdot \left\{ \frac{1}{5} + (x_i - 3)^2 \frac{1}{10} \right\}} \\
 &= 3.182 \sqrt{\left\{ 2 + (x_i - 3)^2 \right\} \times 0.2454}
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

このように 95 % 信頼区間は $\bar{x}$ の所で最小で両端に行くに従って大きくなる。表 3.1 に数値で示してある。

また図 3.1 の信頼区間からもみえる。

§ 4 一般の多項式

条件 x_i のもとで測定して得られた y_i が x_i の p 次式として示されるときその構造式は次のように書ける。

$$\begin{aligned}
 y_i &= \beta_0 + \beta_1(x_{\alpha} - \bar{x}) + \beta_2(x_{\alpha} - \bar{x})^2 + \dots + \beta_p(x_{\alpha} - \bar{x})^p \\
 &\quad + e_{\alpha} \quad (\alpha = 1 \dots N) \dots \dots \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

ただし、 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$ は $n+1$ 個の母数で一定の数である。 e_{α} は $NID(0, \sigma^2)$ に従うことは前と同じ。ただし実用上は p の値は 3 位まででそれ以上のときはもっと外の形を考えた方がよい。多項式の場合は精度が悪い。

まず X 表を作る。

表 4.1 X 表

β_0	β_1	β_2	$\dots \dots \dots \beta_p$	デ - タ
1	$x_1 - \bar{x}$	$(x_1 - \bar{x})^2$	$\dots \dots (x_1 - \bar{x})^p$	y_1
1	$x_2 - \bar{x}$	$(x_2 - \bar{x})^2$	$(x_2 - \bar{x})^p$	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$x_{\alpha} - \bar{x}$	$(x_{\alpha} - \bar{x})^2$	$(x_{\alpha} - \bar{x})^p$	y_{α}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	$x_N - \bar{x}$	$(x_N - \bar{x})^2$	$(x_N - \bar{x})^p$	y_N

次のように記号を定めておく。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})^2 \\ S_2 &= \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})^3 \\ S_i &= \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})^i \\ S_n &= \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})^n \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha} \\ B_1 &= \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x}) y_{\alpha} \\ B_2 &= \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})^2 y_{\alpha} \\ B_i &= \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})^i y_{\alpha} \\ B_n &= \sum_{\alpha=1}^N (x_{\alpha} - \bar{x})^n y_{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

これらを用いて A 表を作る。

表 4. 2 A 表

$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$\hat{\beta}_n$	= B
N	O	S_2	S_n	B_0
O	S_1	S_3	S_{n+1}	B_1
S_1	S_2	S_4	S_{n+2}	B_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_n	S_{n+1}	S_{n+2}	S_{2n}	B_n

A 表の a_{ij} については次の式が成立する。

$$a_{ij} = a_{ji} = S_{i+j} \quad (i, j=0, 1, \dots, n) \quad (4.3)$$

後は A 表より適当な方法で C 表を得る。ただし $C = A^{-1}$ であって C が A の逆行列であることに注意する。残差平方和の S_E については

$$S_E = \sum_{\alpha=1}^N y_{\alpha}^2 - \hat{\beta}_0 \cdot B_0 - \hat{\beta}_1 B_1 \dots \dots - \hat{\beta}_n B_n \quad (4.4)$$

が成立し、その自由度 ϕ_E は

$$\phi_E = N - n - 1 \quad (4.5)$$

ただし母数の数が $n + 1$ 個あることに注意せよ。

分散分析を行うためには C 表を求める必要がある。すなわち

1 =	B_0	B_1		B_n
$\hat{\beta}_0$	C_{00}	C_{01}		C_{0n}
$\hat{\beta}_1$	C_{10}	C_{11}		C_{1n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$\hat{\beta}_n$	C_{n0}	C_{n1}		C_{nn}

とすれば

$$\left. \begin{aligned} D^2(\hat{\beta}_0) &= C_{00} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_i) &= C_{ii} \sigma^2 \\ C_{00}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j) &= C_{ij} \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

であり、 σ^2 の推定値としては

$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E} \quad (4.7)$$

を用いれば良い。

§ 5 2 次の回帰式

4 節の場合で $p = 2$, $N = 5$ として数値例で示すことにしよう。

$$y_i = \alpha + \beta(x_i - \bar{x}) + \gamma(x_i - \bar{x})^2 \quad (i = 1 \dots \dots 5) \quad (5.1)$$

が構造式である。データは次の如くである。

表 5.1 データ

x_i	y_i	$\hat{y}_i$	e_i
1	4.8	5.0	-0.2
2	3.0	3.0	0.0
3	6.2	5.0	1.2
4	9.4	11.0	-1.6
5	21.6	21.0	0.6

これより X 表を作る。

表 5.2 X 表

α	β	r	データ
1	-2	4	4.8
1	-1	1	3.0
1	0	0	6.2
1	1	1	9.4
1	2	4	21.6

これより A 表, C 表を作る。

表 5.3 A 表

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{r}$	= B
5	0	10	45.0
0	10	0	40.0
10	0	34	118.0

表 5.4 C 表

	B_1	B_2	B_3	
$\hat{\alpha}$	$\frac{17}{35}$	0	$-\frac{1}{7}$	5.0
$\hat{\beta}$	0	10	0	4.0
$\hat{r}$	$-\frac{1}{7}$	0	$\frac{1}{14}$	2.0

$$\begin{aligned}
 S_E &= \sum y_a^2 - \hat{\alpha} \cdot B_1 - \hat{\beta} \cdot B_2 - \hat{\gamma} B_3 \\
 &= 62.540 - 5.0 \times 4.50 - 4.0 \times 4.00 \\
 &\quad - 2.0 \times 11.80 \\
 &= 4.40
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} S_E &= \sum y_a^2 - \hat{\alpha} \cdot B_1 - \hat{\beta} \cdot B_2 - \hat{\gamma} B_3 \\ &= 62.540 - 5.0 \times 4.50 - 4.0 \times 4.00 \\ &\quad - 2.0 \times 11.80 \\ &= 4.40 \end{aligned}} \right\} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned}
 \phi_E &= 5 - 3 = 2 \\
 V_E &= \frac{S_E}{\phi_E} = \frac{4.40}{2} = 2.20
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \phi_E &= 5 - 3 = 2 \\ V_E &= \frac{S_E}{\phi_E} = \frac{4.40}{2} = 2.20 \end{aligned}} \right\} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}
 D^2(\hat{\alpha}) &= \frac{1.7}{3.5} \sigma^2 \\
 D^2(\hat{\beta}) &= \frac{1}{1.0} \sigma^2 \\
 D^2(\hat{\gamma}) &= \frac{1}{1.4} \sigma^2
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} D^2(\hat{\alpha}) &= \frac{1.7}{3.5} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}) &= \frac{1}{1.0} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\gamma}) &= \frac{1}{1.4} \sigma^2 \end{aligned}} \right\} \quad (5.4)$$

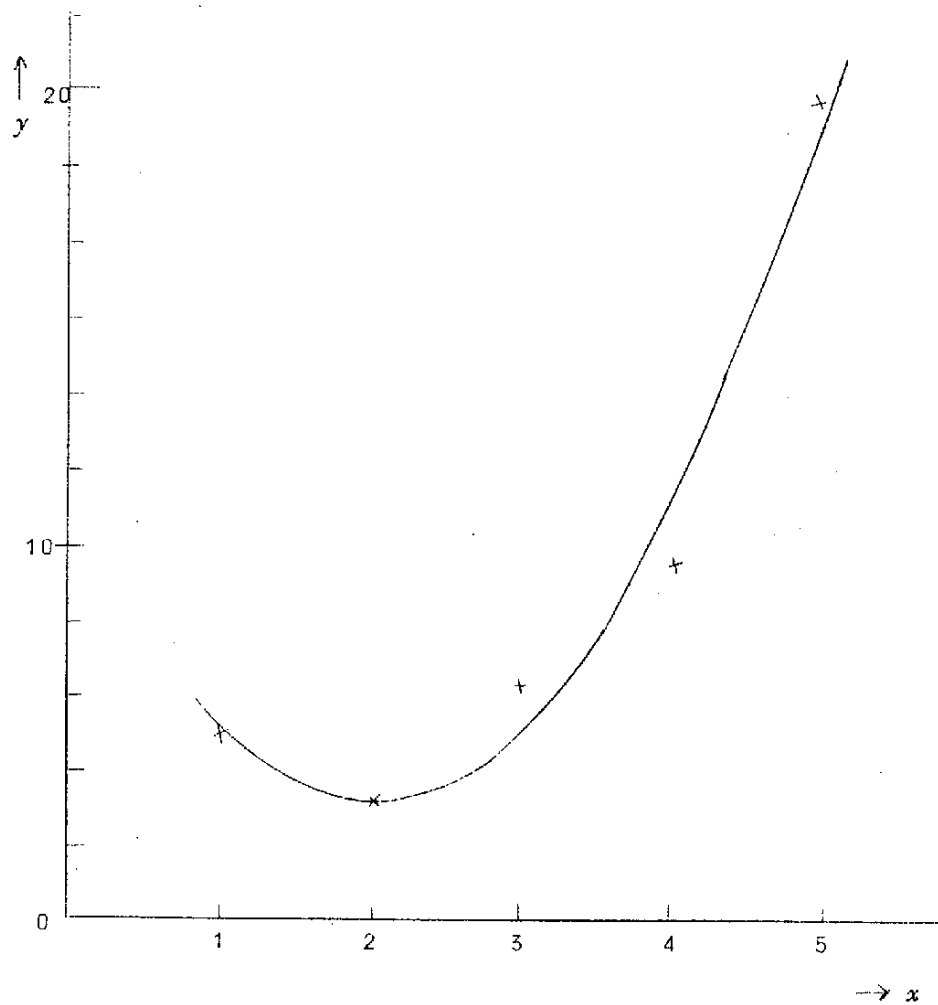


図 5 - 1 2 次 曲 線 の 推 定

これより x_i のときの y の推定値 $\hat{y}_i$ は

$$\hat{y}_i = 5.0 + 4.0(x_i - 3) + 2.0(x_i - 3)^2 \quad (5.5)$$

(5.3), (5.4) 式を用い α の 95% 信頼区間は

$$\begin{aligned} \alpha &: 5.0 \pm t(2, 0.05) \cdot \sqrt{2.20 \times \frac{1.7}{3.5}} \\ &= 5.0 \pm 4.303 \times 1.034 \\ &= 5.0 \pm 4.45 \\ &= 9.45 \sim 0.55 \end{aligned} \quad (5.6)$$

同様に

$$\begin{aligned} \beta &: 4.0 \pm 2.02 \\ &= 6.02 \sim 1.98 \\ \gamma &: 2.0 \pm 1.71 \\ &= 3.71 \sim 0.29 \end{aligned} \quad (5.7)$$

すなわち、どの信頼区間も 0 を含んでいない。

これらより α , β , γ はすべて 5% 有意である。よって 2 次式と考えて良い。

なお同じものについて直交多項式で計算するともっと容易に同じ解を得ることができる。

§ 6 重回帰

今まで述べてきたのは x_i に対する y_i の値が与えられたとき、 y_i を x_i の多項式として求めることであったが、実験の条件によっては、条件となる独立変数の数が 2 以上であることもある。このような場合を重回帰と呼んでいる。このときの構造式は次のようである。

$$\begin{aligned} y &= \beta_{000} \dots + \beta_{100} \dots x_1 + \beta_{010} \dots x_2 + \dots \\ &\quad + \beta_{200} \dots x_1^2 + \beta_{020} \dots x_2^2 + \dots \\ &\quad + \beta_{110} \dots x_1 x_2 + \dots \\ &\quad + \beta_{300} \dots x_1^3 + \beta_{030} \dots x_2^3 + \dots \\ &\quad + \beta_{210} \dots x_1^2 x_2 + \dots \\ &\quad + \beta_{120} \dots x_1 x_2^2 + \dots \\ &\quad + e \\ &= \sum \beta_{ijk} \dots x_1^i x_2^j x_3^k \dots + e \end{aligned} \quad (6.1)$$

例 独立変数が 2 個の 1 次式を考えてみる。

このとき構造式は

$$y_{ij} = \beta_0 + \beta_1 (x_{1i} - \bar{x}_1) + \beta_2 (x_{2j} - \bar{x}_2) + e_{ij} \quad (6.2)$$

$$(i = 1 \dots m, \quad j = 1 \dots n)$$

で与えられる。これを図示すると図 6-2 のようになる。

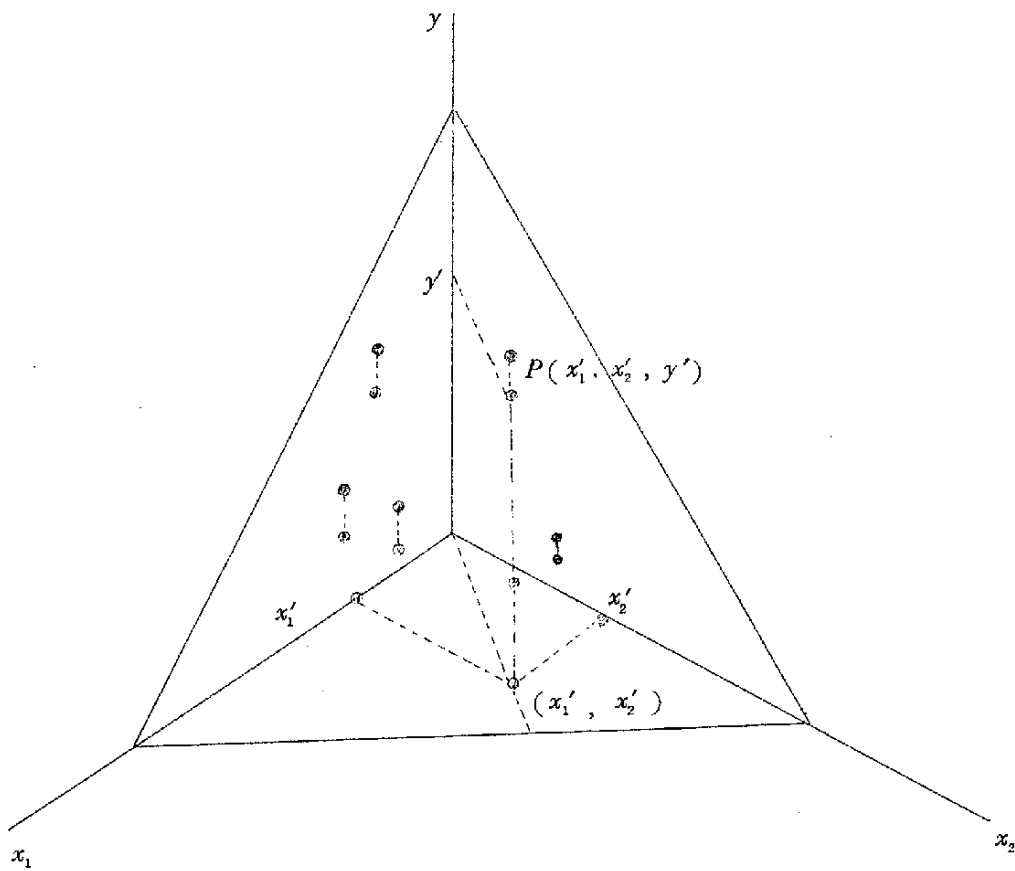


図 6 . 2 重 回 帰 の 1 例

$m = 3, n = 4$ の場合について X 表を作る。

表 6.1 X 表

β_0	β_1	β_2	データ
1	$x_{11} - \bar{x}_1$	$x_{21} - \bar{x}_2$	y_{11}
1	$x_{11} - \bar{x}_1$	$x_{22} - \bar{x}_2$	y_{12}
1	$x_{11} - \bar{x}_1$	$x_{23} - \bar{x}_2$	y_{13}
1	$x_{11} - \bar{x}_1$	$x_{24} - \bar{x}_2$	y_{14}
1	$x_{12} - \bar{x}_1$	$x_{21} - \bar{x}_2$	y_{21}
1	$x_{12} - \bar{x}_1$	$x_{22} - \bar{x}_2$	y_{22}
1	$x_{12} - \bar{x}_1$	$x_{23} - \bar{x}_2$	y_{23}
1	$x_{12} - \bar{x}_1$	$x_{24} - \bar{x}_2$	y_{24}
1	$x_{13} - \bar{x}_1$	$x_{21} - \bar{x}_2$	y_{31}
1	$x_{13} - \bar{x}_1$	$x_{22} - \bar{x}_2$	y_{32}
1	$x_{13} - \bar{x}_1$	$x_{23} - \bar{x}_2$	y_{33}
1	$x_{13} - \bar{x}_1$	$x_{24} - \bar{x}_2$	y_{34}

これより A 表を作る。

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 4 \sum_{i=1}^3 (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 \\ S_2 &= 3 \sum_{j=1}^4 (x_{2j} - \bar{x}_2)^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_{1i} \\ \bar{x}_2 &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 x_{2j} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

を注意すれば

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 (x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2j} - \bar{x}_2) = 0 \quad (6.5)$$

さらに

$$\bar{y} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 y_{ij}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_i &= \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 y_{ij} \\ \bar{y}_j &= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

を用いて

$$\left. \begin{aligned} B_0 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 y_{ij} = 12 \bar{y} \\ B_1 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 (x_{1i} - \bar{x}_1) y_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^3 4 (x_{1i} - \bar{x}_1) \bar{y}_i \\ &= 4 \sum_{i=1}^3 (x_{1i} - \bar{x}_1) (\bar{y}_i - \bar{y}) \\ B_2 &= 3 \sum_{i=1}^3 (x_{2i} - \bar{x}_2) (\bar{y}_i - \bar{y}) \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

これより A 表は

表 6.2 A 表

$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	$= B$
12	0	0	B_0
0	S_1	0	B_1
0	0	S_2	B_2

これより C 表を作れば

表 6.3 C 表

	B_0	B_1	B_2
$\hat{\beta}_0$	$\frac{1}{12}$	0	0
$\hat{\beta}_1$	0	$\frac{1}{S_1}$	0
$\hat{\beta}_2$	0	0	$\frac{1}{S_2}$

これより

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \frac{1}{12} B_0 = \frac{1}{12} 12 \bar{y} = \bar{y} \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{1}{S_1} B_1 = \frac{\sum_{i=1}^3 (x_{1i} - \bar{x}_1) (\bar{y}_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^3 (x_{1i} - \bar{x}_1)^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{1}{S_2} B_2 = \frac{\sum_{j=1}^4 (x_{2j} - \bar{x}_2) (\bar{y}_j - \bar{\bar{y}})}{\sum_{j=1}^4 (x_{2j} - \bar{x}_2)^2}$$

残差平方和 S_E は

$$\begin{aligned} S_E &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 y_{ij}^2 - \hat{\beta}_0^2 \beta_1 - \hat{\beta}_1 B_1 - \hat{\beta}_2 B_2 \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 y_{ij}^2 - \frac{1}{12} B_0^2 - \frac{1}{S_1} B_1^2 - \frac{1}{S_2} B_2^2 \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$\begin{aligned} D^2(\hat{\beta}_0) &= \frac{1}{12} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_1) &= \frac{1}{S_1} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_2) &= \frac{1}{S_2} \sigma^2 \end{aligned} \quad (6.10)$$

これより β_0 , β_1 , β_2 についての 95 % 信頼区間は前と同じようにつくれる。

$$\begin{aligned} \beta_0 &: \hat{\beta}_0 \pm t(9, 0.05) \sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{S_E}{9}} \\ \beta_1 &: \hat{\beta}_1 \pm t(9, 0.05) \sqrt{\frac{1}{S_1} \cdot \frac{S_E}{9}} \\ \beta_2 &: \hat{\beta}_2 \pm t(9, 0.05) \sqrt{\frac{1}{S_2} \cdot \frac{S_E}{9}} \end{aligned} \quad (6.11)$$

例 独立変数が 2 個で 2 次式まで考慮したときの構造式は (6.1) 式を用いて (6.2) とほぼ同様に

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \beta_{00} + \beta_{10}(x_{1i} - \bar{x}_1) + \beta_{01}(x_{2j} - \bar{x}_2) \\ &\quad + \beta_{20}(x_{1i} - \bar{x}_1)^2 + \beta_{02}(x_{2j} - \bar{x}_2)^2 \\ &\quad + \beta_{11}(x_{1i} - \bar{x}_1)(x_{2j} - \bar{x}_2) \\ &\quad + e_{ij} \end{aligned} \quad (6.12)$$

と書ける。後は前と同じように X 表, A 表, C 表を作って行けば良い。

第 3 章 直交多項式

§ 1 ま え が き

前の第 2 章では回帰式として

$$y = a + bx + Cx^2 + \cdots + e \quad (1.1)$$

の形の構造式を考えて、X 表, A 表, O 表を用いて, a, b, C の推定を行ったり S_E を求めたりした。ここで適当な多項式 $P_1(x), P_2(x), \cdots$ などを用いて

$$y = b_0 + b_1 X_1(x) + b_2 X_2(x) + \cdots + \varepsilon \quad (1.2)$$

の形で表現をしておくとなのような利点がある。

(1) 係数を求める計算が容易である。

(2) ある次数を予定して計算を進めてまだ次数が不足のときは更に次数をますことが容易である。

(3) 分散成分, S_E などの計算が容易である。

(4) 各係数の分散を求めること, また係数の 1 次結合の分散を求めることも容易である。

ただし (1.2) 式は通常用いられるものには次のような制約がある。すなわち独立変数 x は専門隔でとられている場合には既刊の数値表を用いることができる。(後の数表参照)
このときが容易に計算できる。

§ 2 2 次式のあてはめ

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 P_1(x_i) + \beta_2 P_2(x_i) + \varepsilon_i \quad (i = 1, \cdots, 5) \quad (2.1)$$

のような構造式を考える。ここで

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5$$

$$P_1(x_i) = x_i - 3 \quad (2.2)$$

$$P_2(x_i) = (x_i - 3)^2 - 2$$

である。これより表 2.1 を作る。

表 2 . 1

x_i	$P_1(x_i)$	$P_2(x_i)$
1	-2	2
2	-1	-1
3	0	-2
4	1	-1
5	2	2

X表を考える。

表 2 . 2 X 表

β_0	β_1	β_2	デ - タ
1	-2	2	$y_1 = 4 . 8$
1	-1	-1	$y_2 = 3 . 0$
1	0	-2	$y_3 = 6 . 2$
1	1	-1	$y_4 = 9 . 4$
1	2	2	$y_5 = 21 . 6$

これより A 表を作れば

表 2 . 3 A 表

$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	= B
5	0	0	45 . 0
0	10	0	40 . 0
0	0	14	28 . 0

C 表はすぐに求めることができる。

表 2 . 4 C 表

1 =	B_0	B_1	B_2	
$\hat{\beta}_0$	$\frac{1}{5}$	0	0	9 . 0
$\hat{\beta}_1$	0	$\frac{1}{10}$	0	4 . 0
$\hat{\beta}_2$	0	0	$\frac{1}{14}$	2 . 0

これより

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \frac{1}{5} B_0 = 9.0 \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{1}{10} B_1 = 4.0 \\ \hat{\beta}_2 &= \frac{1}{14} B_2 = 2.0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
 S_E &= \sum_{i=1}^5 y_i^2 - \hat{\beta}_0 \beta_1 - \hat{\beta}_1 \beta_2 - \hat{\beta}_2 \beta_3 \\
 &= 625.4 - 9.0 \times 45.0 - 4.0 \times 40.0 - 2.0 \times 28.0 \\
 &= 4.40
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

$$\phi_E = 5 - 3 = 2 \tag{2.5}$$

$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E} = \frac{4.40}{2} = 2.20 \tag{2.6}$$

この残差平方和 S_E やその自由度 ϕ_E などとはすべて第2章の(5.2), (5.3)式などと同じである。

これより x_i のときの y の推定値 $\hat{y}_i$ を作ると

$$\begin{aligned}
 \hat{y}_i &= 9.0 + 4.0(x_i - 3) + 2.0\{(x_i - 3)^2 - 2\} \\
 &= 5.0 + 4.0(x_i - 3) + 2.0(x_i - 3)^2
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

これは前章の(5.2)式と同一である。なお分散の値は

$$\left. \begin{aligned}
 D_2(\hat{\beta}_0) &= \frac{1}{5} \sigma^2 \\
 D_2(\hat{\beta}_1) &= \frac{1}{10} \sigma^2 \\
 D_2(\hat{\beta}_2) &= \frac{1}{14} \sigma^2
 \end{aligned} \right\} \tag{2.8}$$

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2) = Cov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = 0 \tag{2.9}$$

これより

$$V(\hat{y}_i) = \frac{1}{5} \sigma^2 + (x_i - 3)^2 \frac{1}{10} \sigma^2 + [(x_i - 3)^2 - 2]^2 \frac{1}{14} \sigma^2$$

数値で示すと

x_i	$V(\hat{y}_i)$
1	$\frac{31}{35} \sigma^2$
2	$\frac{13}{35} \sigma^2$
3	$\frac{17}{35} \sigma^2$
4	$\frac{13}{35} \sigma^2$
5	$\frac{31}{35} \sigma^2$

すなわち先の場合よりも計算が容易である。

§ 3 一般の直交多項式

(1.2) 式のような形で構造式を与えておいて次のような条件をつけるものとする。まず X 表を作ってみる。

表 3-1 X 表

β_0	β_1	β_2	デ - タ
1	$X_1(x_1)$	$X_2(x_1)$	y_1
1	$X_1(x_2)$	$X_2(x_2)$	y_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdot$
1	$X_1(x_\alpha)$	$X_2(x_\alpha)$	y_α
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdot$
1	$X_1(x_N)$	$X_2(x_N)$	y_N

$$a_{11} = 1^2 + 1^2 + \cdots + 1^2 = N$$

$$a_{12} = X_1(x_1) + X_1(x_2) + \cdots + X_1(x_N)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N X_1(x_\alpha)$$

$$a_{13} = X_2(x_1) + X_2(x_2) + \cdots + X_2(x_N)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N X_2(x_\alpha)$$

$$a_{22} = X_1^2(x_1) + X_1^2(x_2) + \cdots + X_1^2(x_N)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N X_1^2(x_\alpha)$$

$$a_{23} = X_1(x_1)X_2(x_1) + X_1(x_2)X_2(x_2)$$

$$+ \cdots + X_1(x_N)X_2(x_N)$$

$$a_{33} = X_2^2(x_1) + X_2^2(x_2) + \cdots + X_2^2(x_N)$$

$$= \sum_{\alpha=1}^N X_2^2(x_\alpha)$$

(3.1)

のようにして要素の a_{ij} が求められる。ここで多項式として $X_1(x)$ は x の 1 次式, $X_2(x)$ は x の 2 次式 $\cdots \cdots X_k(x)$ は x の k 次式であるようにしておく。このとき適当な形をとれば a_{12} , $a_{13}, \cdots, a_{23}, \cdots$ などがすべて 0 であるようにすることができる。勿論 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{kk}$ などは正の値である。このようにとることによって A 表は

表 3-2 A 表

$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$	...	...	$= B$
N	0	0	...	...	$B_0 = \sum Y_\alpha$
0	$\sum_{\alpha=1}^N X_1^2(x_\alpha)$	0			$B_1 = \sum X_1(x_\alpha) Y_\alpha$
0	0	$\sum_{\alpha=1}^N X_2^2(x_\alpha)$	...	...	$B_2 = \sum X_2(x_\alpha) Y_\alpha$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$

のようになり対角頂のみが正で他はすべて0となる。これよりC表を作れば

表 3-3 C 表

B_0	B_1	B_2	
$\frac{1}{N}$	0	0	...
0	$\frac{1}{\sum X_1^2(x_\alpha)}$	0	...
0	0	$\frac{1}{\sum X_2^2(x_\alpha)}$	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

すなわち β_i の推定値 $\hat{\beta}_i$ は

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \frac{1}{N} B_0 = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N Y_\alpha \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{1}{\sum_{\alpha=1}^N X_1^2(x_\alpha)} B_1 = \frac{1}{\sum_{\alpha=1}^N X_1^2(x_\alpha)} \sum_{\alpha=1}^N X_1(x_\alpha) Y_\alpha \\ \hat{\beta}_2 &= \frac{1}{\sum_{\alpha=1}^N X_2^2(x_\alpha)} B_2 = \frac{1}{\sum_{\alpha=1}^N X_2^2(x_\alpha)} \sum_{\alpha=1}^N X_2(x_\alpha) Y_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 2)$$

この分散は

$$\left. \begin{aligned} D^2(\hat{\beta}_0) &= \frac{1}{N} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_1) &= \frac{1}{\sum X_1^2(x_\alpha)} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_2) &= \frac{1}{\sum X_2^2(x_\alpha)} \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (3 \cdot 3)$$

で与えられる。

これらの $X_1(x_\alpha)$, $X_2(x_\alpha)$ をそのつと計算するのであれが何等利益はないが, x_i が等間隔である限りでは一般に適用できる形ですでに数表がつくられている。これらの数表はたとえば後についている表のような形で与えられている。

$N = 5$ のときは $n = 5$ の所で

X_1	X_2	X_3	X_4	
-2	2	-1	1	$x_1 = 1$
-1	-1	2	-4	$x_2 = 2$
0	-2	0	6	$x_3 = 3$
1	-1	-2	-4	$x_4 = 4$
2	2	1	1	$x_5 = 5$
10	14	10	70	$\sum X_i^2(x_\alpha)$

これは

$$X_1(x_1) = X_1(1) = -2$$

$$X_1(x_2) = X_1(2) = -1$$

$\vdots$

$$X_2(x_1) = X_2(1) = 2$$

$$X_2(x_2) = X_2(2) = -1$$

$\vdots$

$$X_4(x_1) = X_4(1) = 1$$

$$X_4(x_2) = X_4(2) = -4$$

(3.4)

を示している。また下のらんの数字は

$$\sum_{\alpha=1}^5 X_1^2(x_\alpha) = 10 = (-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2$$

$$\sum_{\alpha=1}^5 X_2^2(x_\alpha) = 14 = 2^2 + (-1)^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 2^2$$

$$\sum_{\alpha=1}^5 X_3^2(x_\alpha) = 10 = (-1)^2 + 2^2 + 0^2 + (-2)^2 + 1^2$$

(3.5)

$$\sum_{\alpha=1}^5 X_4^2(x_\alpha) = 70 = 1^2 + (-4)^2 + 6^2 + (-4)^2 + 1^2 \quad \left. \vphantom{\sum_{\alpha=1}^5} \right\}$$

以下すべてのらんについて同様に示されている。なお式の具体的な形は

$$\left. \begin{aligned} X_1(x) &= x - 3 \\ X_2(x) &= x^2 - 6x + 7 = (x-3)^2 - 2 \\ X_3(x) &= \frac{1}{6} (5x^3 - 45x^2 + 118x - 84) \\ &= \frac{1}{6} (5(x-3)^3 - 17(x-3)) \\ X_4(x) &= \frac{1}{12} (35x^4 - 420x^3 + 1735x^2 - 2850x + 1512) \\ &= \frac{1}{12} (35(x-3)^4 - 155(x-3)^2 + 72) \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

である。 $n=5$ のときは4次式までしかあてはめることはできない。

直交多項式の場合の解法は N がきまっているならば $X_1(x_1), \dots, X_2(x_1), \dots$ などを表よりひろっておいて

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^N Y_\alpha \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{1}{\sum_{\alpha=1}^N X_1^2(x_\alpha)} \sum_{\alpha=1}^N X_1(x_\alpha) Y_\alpha \\ \hat{\beta}_k &= \frac{1}{\sum_{\alpha=1}^N X_k^2(x_\alpha)} \sum_{\alpha=1}^N X_k(x_\alpha) Y_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

とおくことにより求められる。残差平方和は

$$S_E = \sum_{\alpha=1}^N Y_\alpha^2 - \hat{\beta}_0 \cdot \sum Y_\alpha - \hat{\beta}_1 B_1 - \dots - \hat{\beta}_R B_R \quad (3.8)$$

で求めることができる。その自由度 ϕ_E は

$$\phi_E = N - k - 1 \quad (3.9)$$

不偏分散 V_E は

$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E} \quad (3.10)$$

x_i の方が $1, 2, \dots, N$ でなくて

$$x_1 = a, x_2 = a + h, x_3 = a + 2h \quad (3.11)$$

であるとき

$$x'_i = \frac{x_i - c}{h} + 1 \quad (3.12)$$

で与えられる x_i を新しい x_i とすれば良い。たとえば前出の問題で (2.2) 式で

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, x_5 = 5 \quad (3.13)$$

で与えたがここで

$$x_1 = 30, x_2 = 40, x_3 = 50, x_4 = 60, x_5 = 70 \quad (3.13)$$

で y_i の方は同じ場合を考えるこのときは

$$\left. \begin{aligned} x'_i &= \frac{x_i - 30}{10} + 1 = \frac{x_i - 20}{10} \\ &= \frac{1}{10} x_i - 2 \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

とすれば良い。このときは

$$x_i = (x'_i + 2) \times 10 \quad (3.15)$$

でもとにもどすことができる。このとき (2.7) 式は

$$\hat{y}_i = 5.0 + 4.0 \frac{x_i - 50}{10} + 2.0 \left(\frac{x_i - 50}{10} \right)^2 \quad (3.16)$$

となる。

§ 4 直交多項式の作り方

x_i が $1 \dots n$ までであるとき $X_1(x_i)$, $X_2(x_i)$ を作ってみよう。(3.1) 式より次のような条件を得る。

$$a_{12} = \sum_{i=1}^N X_1(x_i) = 0 \quad (4.1)$$

ここで

$$X_1(x_i) = ax_i + b \quad (4.2)$$

とおく。

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= (ax_1 + b) + (ax_2 + b) + \dots + (ax_n + b) \\ &= a(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + nb \\ &= a\bar{x} + nb = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

これより

$$\begin{aligned} a\bar{x} + b &= 0, \\ b &= -a\bar{x} \end{aligned} \quad (4.4)$$

(4.2), (4.4) 式を場合らせて

$$X_1(x_i) = a(x_i - \bar{x}) \quad (4.5)$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2, \quad \dots \dots x_n = n \quad (4.6)$$

であるので

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{n} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2} \\ &= \frac{1}{n}(1+2+\dots+n) \end{aligned} \right\} (4.7)$$

ここで n が奇数であれば $\bar{x}$ は整数, n が偶数であれば $2\bar{x}$ は奇数で整数である。よって, $X_1(x_i)$ が x_i の各点で整数であるためには n が奇数であれば 1, n が偶数であれば 2 を乗じておけば良い。すなわち

$$\left. \begin{aligned} X_1(x_i) &= x_i - \frac{n+1}{2} \quad (n:\text{奇数}) \\ X_1(x_i) &= 2(x_i - \frac{n+1}{2}) \quad (n:\text{偶数}) \end{aligned} \right\} (4.8)$$

$X_2(x_i)$ をきめるためには

$$\left. \begin{aligned} a_{13} &= \sum_{i=1}^n X_2(x_i) = 0 \\ a_{23} &= \sum_{i=1}^n X_1(x_i) \cdot X_2(x_i) = 0 \end{aligned} \right\} (4.9)$$

であれば良い。 $X_2(x_i)$ が整数になるようにするためにはやや条件が面倒なので一応

$$X_2(x_i) = \left\{ \left(x_i - \frac{n+1}{2} \right)^2 + a \left(x_i - \frac{n+1}{2} \right) + b \right\} \times \lambda \quad (4.10)$$

とおいて, a, b を決めよう。

$$\left. \begin{aligned} a_{13} &= \sum X_2(x_i) \\ &= \sum \left(x_i - \frac{n+1}{2} \right)^2 + a \sum \left(x_i - \frac{n+1}{2} \right) + bn \\ &= \frac{1}{12} n(n^2 - 1) + a \times 0 + bn = 0 \end{aligned} \right\} (4.11)$$

これより

$$b = \frac{-1}{12} (n^2 - 1) \quad (4.12)$$

$$a_{23} = \sum X_2(x_i) X_1(x_i)$$

$$\left. \begin{aligned} &= \sum (x_i - \frac{n+1}{2})^3 + a \sum (x_i - \frac{n+1}{2})^2 + b \sum (x_i - \frac{n+1}{2}) \\ &= 0 + \frac{a}{12} n(n^2 - 1) + 0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

これより

$$a = 0 \quad (4.14)$$

よって

$$X_2(x_i) = \left\{ (x_i - \frac{n+1}{2})^2 - \frac{1}{12} (n^2 - 1) \right\} \times \lambda \quad (4.15)$$

である。先にあげたようにたとえば $n = 5$ であれば

$$\left. \begin{aligned} X_2(x_i) &= \lambda \left\{ (x_i - 3)^2 - \frac{1}{12} \cdot 24 \right\} \\ &= \lambda \{ (x_i - 3)^2 - 2 \} \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

よって $\lambda = 1$ とおけばよいことがわかる。

§ 5 重回帰における応用

前章の (6.12) 式のような構造式の場合を考える。ただし x_{1i} のかわりに $X_1^{(1)}(x_{1i})$ を、また x_{1i}^2 のかわりに $X_2^{(1)}(x_{1i})$ をおき、 x_{2i} のかわりに $X_1^{(2)}(x_{2i})$ を、 x_{2i}^2 のかわりに $X_2^{(2)}(x_{2i})$ をおく。

このようにして

$$\left. \begin{aligned} y_{ij} &= \beta_{00} + \beta_{01} X_1^{(1)}(x_{1i}) + \beta_{02} X_2^{(1)}(x_{1i}) \\ &\quad + \beta_{10} X_1^{(2)}(x_{2i}) + \beta_{11} X_1^{(1)}(x_{1i}) \times X_1^{(2)}(x_{2i}) + \varepsilon_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

となる。これより X 表を作れば

表 5.1 X 表

β_{00}	β_{10}	β_{01}	β_{20}	β_{02}	β_{11}	$\tau - \sigma$
1	$X_1^{(1)}(x_{11})$	$X_1^{(2)}(x_{21})$	$X_2^{(1)}(x_{11})$	$X_2^{(2)}(x_{21})$	$X_1^{(1)}(x_{11}) \cdot X_1^{(2)}(x_{21})$	y_{11}
1	$X_1^{(1)}(x_{11})$	$X_1^{(2)}(x_{22})$	$X_2^{(1)}(x_{11})$	$X_2^{(2)}(x_{22})$	$X_1^{(1)}(x_{11}) \cdot X_1^{(2)}(x_{22})$	y_{12}
1	$X_1^{(2)}(x_{11})$	$X_1^{(2)}(x_{2n})$	$X_2^{(1)}(x_{11})$	$X_2^{(2)}(x_{2n})$	$X_1^{(1)}(x_n) \cdot X_1^{(2)}(x_{2n})$	y_{1n}
1	$X_1^{(1)}(x_{12})$	$X_1^{(2)}(x_{21})$	$X_2^{(1)}(x_{12})$	$X_2^{(2)}(x_{21})$	$X_1^{(1)}(x_{12}) \cdot X_1^{(2)}(x_{21})$	y_{22}
1	$X_1^{(1)}(x_{12})$	$X_1^{(2)}(x_{22})$	$X_2^{(1)}(x_{12})$	$X_2^{(2)}(x_{22})$	$X_1^{(1)}(x_{12}) \cdot X_1^{(2)}(x_{22})$	
1	$X_1^{(1)}(x_{1m})$	$X_1^{(2)}(x_{2n})$	$X_2^{(1)}(x_{1m})$	$X_2^{(2)}(x_{2n})$	$X_1^{(1)}(x_{1m}) \cdot X_1^{(2)}(x_{2n})$	

たとえば $m = 3$, $n = 5$ の場合を考えて, $x_{11} = 1$, $x_{12} = 2$, $x_{13} = 3$, $x_{21} = 1$, $x_{22} = 2$, $x_{23} = 3$, $x_{24} = 4$, $x_{25} = 5$ とおけば

x_{1i}	$X_1^{(1)}(x_{1i})$	$X_2^{(1)}(x_{1i})$
1	-1	1
2	0	-2
3	1	1

$$X_1^{(1)}(x_{1i}) = x_{1i} - 2, \quad X_2^{(1)}(x_{1i}) = 3(x_{1i} - 2)^2 - 2 \quad (5.2)$$

x_{2i}	$X_1^{(2)}(x_{2i})$	$X_2^{(2)}(x_{2i})$
1	-2	2
2	-1	-1
3	0	-2
4	1	-1
5	2	2

$$X_1^{(2)}(x_{2i}) = x_{2i} - 3, \quad X_2^{(2)}(x_{2i}) = (x_{2i} - 3)^2 - 2 \quad (5.3)$$

であることを用いて表 5 . 1 X 表を書き直すと表 5 . 2 X 表が得られる。

表 5 - 2 X 表

β_{00}	β_{10}	β_{01}	β_{20}	β_{02}	β_{11}	デ - タ
1	-1	-2	1	2	2	y_{11}
1	-1	-1	1	-1	1	y_{12}
1	-1	0	1	-2	0	y_{13}
1	-1	1	1	-1	-1	y_{14}
1	-1	2	1	2	-2	y_{15}
1	0	-2	-2	2	0	y_{21}
1	0	-1	-2	-1	0	y_{22}
1	0	0	-2	-2	0	y_{23}
1	0	1	-2	-1	0	y_{24}
1	0	2	-2	2	0	y_{25}
1	1	-2	1	2	-2	y_{31}
1	1	-1	1	-1	-1	y_{32}
1	1	0	1	-2	0	y_{33}
1	1	1	1	-1	1	y_{34}
1	1	2	1	2	2	y_{35}

これより A 表を作ると

表 5-3 A 表

$\hat{\beta}_{00}$	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{01}$	$\hat{\beta}_{20}$	$\hat{\beta}_{02}$	$\hat{\beta}_{11}$	$=B$
15						B_{00}
	10					B_{10}
		30				B_{01}
			30			B_{20}
				42		B_{02}
					20	B_{11}

A 表は対角線以外はすべて 0 である。これも直交多項式の直交性から証明される。

$$\begin{aligned}
 B_{00} &= (y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15}) + (y_{21} + y_{22} + y_{23} + y_{24} + y_{25}) \\
 &\quad + (y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34} + y_{35}) \\
 &= 15 \cdot \bar{y}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{10} &= (-y_{11} - y_{12} - y_{13} - y_{14} - y_{15}) + (y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34} + y_{35}) \\
 &= -5\bar{y}_{1\cdot} + 5\bar{y}_{3\cdot} = 5(-\bar{y}_{1\cdot} + \bar{y}_{3\cdot})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{01} &= (-2y_{11} - y_{12} + y_{14} + 2y_{15}) + (-2y_{21} - y_{22} + y_{24} + 2y_{25}) \\
 &\quad + (-2y_{31} - y_{32} + y_{34} + 2y_{35}) \\
 &= 3(-2\bar{y}_{1\cdot} - \bar{y}_{2\cdot} + \bar{y}_{4\cdot} + 2\bar{y}_{5\cdot})
 \end{aligned}$$

(5.2)

$$\begin{aligned}
 B_{20} &= (y_{11} + y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{15}) + (-2y_{21} - 2y_{22} - 2y_{23} - 2y_{24} - 2y_{25}) \\
 &\quad + (y_{31} + y_{32} + y_{33} + y_{34} + y_{35}) \\
 &= 5(\bar{y}_{1\cdot} - 2\bar{y}_{2\cdot} + \bar{y}_{3\cdot})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{02} &= (2y_{11} - y_{12} - 2y_{13} - y_{14} + 2y_{15}) + (2y_{21} - y_{22} - 2y_{23} - y_{24} + 2y_{25}) \\
 &\quad + (2y_{31} - y_{32} - 2y_{33} - y_{34} + 2y_{35}) \\
 &= 3(2\bar{y}_{1\cdot} - \bar{y}_{2\cdot} - 2\bar{y}_{3\cdot} - \bar{y}_{4\cdot} + 2\bar{y}_{5\cdot})
 \end{aligned}$$

$$B_{11} = (2y_{11} + y_{12} - y_{14} - 2y_{15}) + (-2y_{31} - y_{32} + y_{34} + 2y_{35})$$

B_{00} , B_{10} , B_{01} , B_{20} , B_{02} などは前の単回帰のときと同じようにして求められる。ただ回数が繰返されたのと同じ形になっている。 B_{11} のみは2変数に特有の形であって直接算をすより仕方がない。

これより正規方程式をとして

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_{00} &= \frac{1}{15} B_{00} \\ \hat{\beta}_{10} &= \frac{1}{10} B_{10} \\ \hat{\beta}_{01} &= \frac{1}{30} B_{01} \\ \hat{\beta}_{20} &= \frac{1}{30} B_{20} \\ \hat{\beta}_{02} &= \frac{1}{42} B_{02} \\ \hat{\beta}_{11} &= \frac{1}{20} B_{11} \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

これより分散は

$$\left. \begin{aligned} D^2(\hat{\beta}_{00}) &= \frac{1}{15} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_{10}) &= \frac{1}{10} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_{01}) &= \frac{1}{30} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_{20}) &= \frac{1}{30} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_{02}) &= \frac{1}{42} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_{11}) &= \frac{1}{20} \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

で共分散はすべて0である。

残差平方和 S_E は

$$\left. \begin{aligned} S_E &= \sum y^2 - \frac{1}{15} B_{00}^2 - \frac{1}{10} B_{10}^2 - \frac{1}{30} B_{01}^2 \\ &\quad - \frac{1}{30} B_{20}^2 - \frac{1}{42} B_{02}^2 - \frac{1}{20} B_{11}^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

自由度 ϕ_E は

$$\phi_E = 15 - 6 = 9 \quad (5.6)$$

よって

$$V_E = \frac{S_E}{\phi_E} = \frac{S_E}{9} \quad (5.7)$$

である。

§ 6 数 値 例

独立変数を x, y とし $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, y_1 = 1, y_2 = 2, y_3 = 3, y_4 = 4, y_5 = 5$ とで組合わせた 15 個のデータに対して Z が測定されているものとする。

表 6.1 データ

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	計
1	49	48	54	61	74	286
2	48	46	49	57	68	268
3	63	63	65	72	80	343
計	160	157	168	190	222	897

データの構造式

$$\left. \begin{aligned} Z_{ij} = & a_{00} + a_{10}x_i + a_{01}y_j \\ & + a_{20}x_i^2 + a_{11}x_i y_j + a_{02}y_j^2 + e_{ij} \\ & (i = 1, 2, 3, \therefore j = 1, 2, 3, 4, 5) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

とする。ただし $e_{ij} \sim NID(0, \sigma^2)$ である。ここで

$$X_1(x) = x - 2, \quad X_2(x) = 3x^2 - 12x + 10 \quad (6.2)$$

$$Y_1(y) = y - 3, \quad Y_2(y) = y^2 - 6y + 7 \quad (6.3)$$

を用いて (6.1) 式を書き直すことにする。

$$\left. \begin{aligned} Z_{ij} = & \beta_{00} + \beta_0 X_1(x_i) + \beta_{01} Y_1(y_j) \\ & + \beta_{20} X_2(x_i) + \beta_{11} X_1(x_i) Y_1(y_j) + \beta_{02} Y_2(y_j) + e_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

まず X 表を作る。表 5-2 と同様にして

表 6.1 X 表

β_{00}	β_{10}	β_{01}	β_{20}	β_{02}	β_{11}	データ
1	-1	-2	1	2	2	49
1	-1	-1	1	-1	1	48
1	-1	0	1	-2	0	54
1	-1	1	1	-1	-1	61
1	-1	2	1	2	-2	74
1	0	-2	-2	-2	0	48
1	0	-1	-2	-1	0	46
1	0	0	-2	-2	0	49
1	0	1	-2	-1	0	57
1	0	2	-2	2	0	68
1	1	-2	1	2	-2	63
1	1	-1	1	-1	-1	63
1	1	0	1	-2	0	65
1	1	1	1	-1	1	72
1	1	2	1	2	2	80

表 6.2 A 表

$\hat{\beta}_{00}$	$\hat{\beta}_{10}$	$\hat{\beta}_{01}$	$\hat{\beta}_{20}$	$\hat{\beta}_{02}$	$\hat{\beta}_{11}$	=1
15						$B_{00} = 897$
	10					$B_{10} = 57$
		30				$B_{01} = 157$
			30			$B_{20} = 93$
				42		$B_{02} = 81$
					20	$B_{11} = -20$

$$B_{00} = 897$$

$$B_{10} = -286 + 343 = 57$$

$$B_{01} = -160 \times 2 - 157 + 190 + 222 \times 2 = 157$$

$$B_{20} = 286 - 268 \times 2 + 343 = 93$$

$$B_{02} = 160 \times 2 - 157 - 168 \times 2 - 190 + 222 \times 2 = 81$$

$$B_{11} = 49 \times 2 + 48 - 61 - 74 \times 2$$

$$-63 \times 2 - 63 + 72 + 80 \times 2 = -20$$

正規方程式として

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta}_{00} &= \frac{1}{15} B_{00} = \frac{1}{15} 897 = 59.8 \\ \hat{\beta}_{10} &= \frac{1}{10} B_{10} = \frac{1}{10} 57 = 5.7 \\ \hat{\beta}_{01} &= \frac{1}{30} B_{01} = \frac{1}{30} 157 = 5.2 \\ \hat{\beta}_{20} &= \frac{1}{30} B_{20} = \frac{1}{30} 93 = 3.1 \\ \hat{\beta}_{02} &= \frac{1}{42} B_{02} = \frac{1}{42} 81 = 1.9 \\ \hat{\beta}_{11} &= \frac{1}{20} B_{11} = \frac{1}{20} (-20) = -1.0 \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

分散は

$$\left. \begin{aligned} D^2(\hat{\beta}_{00}) &= \frac{1}{15} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_{10}) &= \frac{1}{10} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_{01}) &= \frac{1}{30} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_{20}) &= \frac{1}{30} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_{02}) &= \frac{1}{42} \sigma^2 \\ D^2(\hat{\beta}_{11}) &= \frac{1}{20} \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

残差平方和

$$\left. \begin{aligned} S_E &= \sum y^2 - \frac{1}{15} B_{00}^2 - \frac{1}{10} B_{10}^2 - \frac{1}{30} B_{01}^2 \\ &\quad - \frac{1}{30} B_{20}^2 - \frac{1}{42} B_{02}^2 - \frac{1}{20} B_{11}^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}
 &= 55259 - \frac{1}{15} 897^2 - \frac{1}{10} 57^2 - \frac{1}{30} 157^2 \\
 &\quad - \frac{1}{30} 93^2 - \frac{1}{42} 81^2 - \frac{1}{20} (-20)^2 \\
 &= 7352
 \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
 S_{00} &= \frac{1}{15} B_{00}^2 = 53640.6 \\
 S_{10} &= \frac{1}{10} B_{10}^2 = 324.9 \\
 S_{01} &= \frac{1}{30} B_{10}^2 = 821.6 \\
 S_{20} &= \frac{1}{30} B_{20}^2 = 288.3 \\
 S_{02} &= \frac{1}{42} B_{02}^2 = 156.2 \\
 S_{11} &= \frac{1}{20} B_{11}^2 = 20.0
 \end{aligned} \quad (6.9)$$

β_{ij} の分散の推定量は $C_{ij} \hat{\sigma}^2$ である。

自由度 ϕ_E は

$$\phi_E = 15 - 6 = 9 \quad (6.10)$$

であるので

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}^2 &= S_E / \phi_E \\
 &= 7352 / 9 = 0.816
 \end{aligned} \quad (6.11)$$

これより

表 6.3 分散の推定量

母数	分散の推定量
β_{00}	0.49
β_{10}	0.74
β_{01}	0.25
β_{20}	0.25
β_{02}	0.18
β_{11}	0.37

が得られる。(6.9)式の値と比較するとこれはすべて十分小であるので各係数は誤差の変動より十分大であると考えて良いので推定値は良い推定を与えている。

(6.6)式の値を用いて

$$\begin{aligned}
 \hat{Z}_{ij} &= 59.8 + 5.7(x-2) + 5.2(y-3) \\
 &\quad + 3.1[3(x-2)^2 - 2] \\
 &\quad + 1.9[(y-3)^2 - 2] \\
 &\quad - 1.0(x-2)(y-3) \\
 &= 49.7 + 5.7(x-2) + 5.2(y-3) \\
 &\quad + 9.3(x-2)^2 + 1.9(y-3)^2 \\
 &\quad - 1.0(x-2)(y-3) \\
 &= 71.2 - 28.5x - 4.37y \\
 &\quad + 9.3x^2 - xy - 1.9y^2
 \end{aligned}
 \tag{6.12}$$

が得られる。

第 4 章 分散分析法

§ 1 は し が き

実験計画法においてはデザインの問題と結果がでてからの解析とにわかれる。このうち解析の方の一つの方法として分散分析法がある。この理論のごく概略をそのよく用いられる形のもの 2, 3 についてあげることにしよう。勿論ここで話すのは実験計画法全体からみればごく一部であるし、また実際の場合には色々と問題があるがそれらの点については参考書などに譲ることにしよう。

以下計算を進めるに当たって次のような記号を用いることにする。

$$\text{平 均: } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2 \cdot 1)$$

$$\begin{aligned} \text{平 方 和: } S &= \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \end{aligned} \quad (2 \cdot 2)$$

$$\text{母 数: } \mu, \alpha_i, \beta_j \quad (2 \cdot 3)$$

$$\text{推 定 値: } \hat{\mu}, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j \quad (2 \cdot 4)$$

$$\text{母 分 散: } \sigma^2 \quad (2 \cdot 5)$$

$$\text{推 定 値: } \hat{\sigma}^2 \quad (2 \cdot 6)$$

$$\text{不 偏 分 散: } V = \frac{S}{\phi} \quad (2 \cdot 7)$$

$$\text{自 由 度: } \phi \quad (2 \cdot 8)$$

§ 2 1 元配置要因実験

実験計画において分散分析をするために原因としてあげられるものを因子と云う。この因子が 1 種類であるときこれを 1 元配置と云う。手順をあげる前に一応理論を述べておこう。まず因子を何段階かにわけるとこれを水準と云う。各水準について繰返しを行なう。これを構造式で表わすと次のようになる。

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \quad (i = 1 \cdots a, j = 1 \cdots n_i) \quad (2 \cdot 1)$$

$$e_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$$

e_{ij} はすべて互いに独立である。ただし $\sum \alpha_i = 0$ である。

ここで知りたいのは、 α_i の間に差があるかどうかと云うことである。ここで μ は総平均をしめし α_i は因子 A の第 i 水準における主効果を示す。たとえば米の 10 アール当り収量におよぼす

品種の影響と云うとき品種が因子であって、何種類比較するかが水準数であり、その収量に及ぼす影響の大きさの効果が α_i で示される。また金属の強度に及ぼす炭素の含有量の影響などの場合に因子は炭素の含有量であり、その含有量の違い、たとえば1%、1.5%、2%などが各水準であり、その実験をするための水準の数は目的に応じて適当に決定される。

α_i の間に差があるかどうかを知るためには次のような方法がとられる。まず S_E を求める。ついで α_i がすべて効果がないものとして

$$y_{ij} = \mu + e_{ij} \quad (i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, n_i) \quad (2.2)$$

として S_E^* を求める。

この場合、 S_E^* の方が当然 S_E より大である。

$$S_A = S_E^* - S_E \quad (2.3)$$

とすれば S_A が α_i の効果を示す。

$$S_A = \sum_{i=1}^a \frac{1}{n_i} Y_{i.}^2 - \frac{1}{N} Y_{..}^2 \quad (2.4)$$

ただしここで

$$Y_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \quad (2.5)$$

$$Y_{..} = \sum_{j=1}^a \sum_{i=1}^{n_i} y_{ij} \quad (2.6)$$

よって

$$\begin{aligned} S_E &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{1}{N} Y_{..}^2 - S_A \\ &= S_T - S_A \end{aligned} \quad (2.7)$$

ここで S が残差項である。(2.1)式を(2.4)式に代入すれば

$$S_A = \sum_i n_i \alpha_i^2 + 2 \sum_i n_i \alpha_i \bar{e}_{i.} + \sum_i n_i (\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})^2 \quad (2.8)$$

が得られる。この S_A は対してもし

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_n = 0$$

が成立するならば

$$S_A = \sum_i n_i (\bar{e}_{i.} - \bar{e}_{..})^2 \quad (2.9)$$

よって $e_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$ であれば

$$S_A/\sigma^2 \sim \chi^2(\sigma-1) \quad (2\cdot10)$$

すなわち S_A/σ^2 は自由度 $(\sigma-1)$ のカイ二乗分布に従う。

一方 S_E/σ^2 の方は自由度 $(\sum n_i - \sigma)$ のカイ二乗分布をする。しかもこの値は S_A とは独立であるので

$$F_0 = \frac{S_A/\phi_A}{S_E/\phi_E} = \frac{S_A/(\sigma-1)}{S_E/(\sum n_i - \sigma)} \quad (2\cdot11)$$

で示される F_0 は、もし $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \dots \alpha_a = 0$ の条件が満足されているならば F 分布に従う。もし上の条件が満足されないときは平均的にはより大きい値をとる。よって検定の仕方としては F_0 が F 分布しているときある値（この値は F 分布の 5% 点であり表より求めることができる。）より大きい値になる確率は小さい。よってこのときは先の仮定の方をすすめることにする。この仮定のことを帰無仮説と呼んでいる。

各分布間の関係は確率変数 x_i が $N(\mu, \sigma^2)$ にしたがうとき

$$u_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad (2\cdot12)$$

とすれば u_i は $N(0, 1)$ に従う。すなわち標準正規分布をすると云う。

一般に $ax_i + b$ なる形は $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$ に従うことが云える。また

$$y = x_1 + x_2 + \dots \dots + x_n \quad (2\cdot13)$$

であって x_i がたがいに独立でありかつ

$$x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

であれば

$$y \sim N(\sum \mu_i, \sum \sigma_i^2)$$

である。

また $u_i \sim N(0, 1)$ のとき

$$\chi^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots \dots + u_n^2 \quad (2\cdot14)$$

で示される χ^2 は自由度 n のカイ二乗分布をすることが示される。

また χ_1^2 が自由度 ϕ_1 のカイ二乗分布に従い、 χ_2^2 が自由度 ϕ_2 のカイ二乗分布に従いかつたがいに独立であるならば

$$F = \frac{\chi_1^2/\phi_1}{\chi_2^2/\phi_2} \quad (2\cdot15)$$

は自由度 (ϕ_1, ϕ_2) の F 分布に従うことが分っている。一方 S_A の期待値は

$$E(S_A) = \sum_i n_i \alpha_i^2 + (\sigma-1) \cdot \sigma^2 \quad (2\cdot16)$$

であ S_E の方は

7)

$$E(S_E) = \phi_E \cdot \sigma^2 \quad (2 \cdot 17)$$

であるので

$$F = \frac{S_A / (\sigma - 1)}{S_E / \phi_E} \quad (2 \cdot 18)$$

は平均的に 1 より大である。すなわちもしすべての $\alpha_i = 0$ ならば F 分布に従うが、 α_i がすべては 0 でないならば F 分布で期待される値より大きい値をとる筈である。このことを利用して帰無仮説 H_0 として

$$H_0 : \alpha_i = 0 \quad (i = 1, \dots, a)$$

を検定することが F 検定と呼ばれている。

§ 3 1 元配置のとき方の原理

次のようなデータが与えられたとする。すなわち因子は A 1 種類（たとえば温度でも良いし品種別でも良いし、購入先でも良いし、地方別と云うようなことでも良い。）その水準数は a （温度が 100℃, 120℃, 140℃, 160℃だとすれば 4 水準、地方を北海道, 東北, 関東, 中部, 北陸, 近畿, 四国, 中国, 九州と分ければ 9 水準である。）であるとき、各水準に対して n_i 回繰返して実験を行なったとするとそのデータは次のようにあたえられる。

表 3・1

データ表

A_1	A_2	A_a
y_{11}	y_{21}	y_{a1}
y_{12}	y_{22}	y_{a2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_{1n_1}	y_{2n_2}	y_{ana}

これに対して次のような手順で解析を行なう。

構造式を作る

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \quad (i = 1 \dots a, j = 1 \dots n_i) \quad (3 \cdot 1)$$

μ : 総 平 均

α_i : A_i 主 効 果

$e_{ij} \sim \text{NID}(0, \sigma^2)$

ここで X 表を作る。

表 3 ・ 2 X 表

μ	α_1	α_2	 α_a	デ-タ
1	1			y_{11}
1	1			y_{12}
1	1			y_{13}
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
1	1			y_{1n_1}
1		1		y_{21}
1		1		y_{22}
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
1		1		y_{2n_2}
1				$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$
1			1	y_{a1}
$\vdots$			1	y_{a2}
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
1			1	y_{ana}

これより A 表を作れば

表 3 ・ 3 A 表

$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$	 $\hat{\alpha}_a$	= B
N	n_1	n_2	 n_a	$Y_{..}$
n_1	n_1			$Y_{1.}$
n_2		n_2		$Y_{2.}$
$\vdots$				$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$
n_a			n_a	$Y_{a.}$

ここで

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum_{i=1}^a n_i \\ Y_{..} &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \\ Y_{1.} &= \sum_{j=1}^{n_1} y_{1j} \\ &\vdots \\ Y_{i.} &= \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

このままでは A の逆行列を作って C を作ることはできない。と云うのは A が特異行列であって $|A| = 0$ であるからである。これをさけるには前に述べたようにある条件をつけて1つ母数をへらすか、その条件のままでとくかであるがその後者に従うとする。すなわち、

$$n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + \dots + n_a \alpha_a = 0 \quad (3.3)$$

とおく。このとき A 表から作られる正規方程式は

$$\left. \begin{aligned} N\hat{\mu} + n_1\hat{\alpha}_1 + n_2\hat{\alpha}_2 + \dots + n_a\hat{\alpha}_a &= Y_{..} \\ n_1\hat{\mu} + n_1\hat{\alpha}_1 &= Y_{1.} \\ n_2\hat{\mu} + &+ n_2\hat{\alpha}_2 &= Y_{2.} \\ &\vdots \\ &\vdots \\ n_1\hat{\alpha}_1 + n_2\hat{\alpha}_2 + \dots + n_a\hat{\alpha}_a &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

また

$$\left. \begin{aligned} N\hat{\mu} &= Y_{..} \\ n_i\hat{\mu} + n_i\hat{\alpha}_i &= Y_{i.} \quad (i = 1 \dots a) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

さらにこれを解いて

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{N} Y_{..} = \bar{y}_{..} \\ \hat{\alpha}_i &= \frac{1}{n_i} Y_{i.} - \bar{y}_{..} \\ &= \bar{y}_i - \bar{y}_{..} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

これより

$$S_E = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \bar{y}_{..} Y_{..} - \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) Y_{i.} \quad (3.7)$$

一方 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0$ とおけば構造式は

$$y_{ij} = \mu + e_{ij} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, \dots, a \\ j = 1, \dots, n_i \end{array} \right) \quad (3.8)$$

であり前と同様にして

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} \quad (3.9)$$

$$S_E^* = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \bar{y}_{..} Y_{..} \quad (3.10)$$

これより

$$\begin{aligned} S_A = S_E^* - S_E &= \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) Y_{i.} \\ &= \sum_{i=1}^a \frac{1}{n_i} Y_{i.}^2 - \frac{1}{N} Y_{..}^2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

§ 4 1元配置の具体的なとき方

(1) 構造式を作る

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \quad \left(\begin{array}{l} i = 1, \dots, a \\ j = 1, \dots, n_i \end{array} \right) \quad (4.1)$$

$$\sum_i n_i \alpha_i = 0 \quad (4.2)$$

(2) 帰無仮説をたてる。

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0 \quad (4.3)$$

(3) 修正項 CT を計算する。

$$CT = \frac{1}{N} Y_{..}^2 = \bar{y}_{..} Y_{..} \quad (4.4)$$

(4) 総平方和 S_T の計算

$$S_T = \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - CT \quad (4.5)$$

(5) 平方和 S_A の計算

$$S_A = \sum_{i=1}^a \frac{1}{n_i} Y_{i.}^2 - CT \quad (4.6)$$

(6) 残差平方和 S_E の計算

$$S_E = S_T - S_A \quad (4.7)$$

(7) 自由度を求める。

$$\phi_A = a - 1, \phi_T = N - 1, \phi_E = N - a \quad (4 \cdot 3)$$

(8) 分散分析表を作る

(9) 分散比を出して F 分布表で比較をする。

分散分析表

要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比
A 因子	S_A	$\phi_A = a - 1$	$V_A = S_A / \phi_A$	$F_0 = V_A / V_E$
誤差	S_E	$\phi_E = N - a$	$V_E = S_E / \phi_E$	
計	S_T	$\phi_T = N - 1$		

§ 5 1元配置(数値例)

次のようなデータが得られているものとする。水準数は4である。

表 5・1 データ表(1)

A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
3 1	3 2	2 8	2 7
3 2	3 2	3 2	2 6
3 3	2 9	3 0	2 8

(1) 構造式は

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij} \quad (5 \cdot 1)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4; j = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{i=1}^4 3\alpha_i = 0 \text{ または } \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 0 \quad (5 \cdot 2)$$

(2) 帰無仮設 $H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ (5・3)

(3) 修正項 CT

$$CT = \frac{Y_{\bullet\bullet}^2}{N} = \frac{(360)^2}{12} = 10800 \quad (5 \cdot 4)$$

ここで実用上手計算のときは一定数、たとえば30を y_{ij} からひいたものを用いて計算を行な行なわれる。これは CT その他平方和の計算の桁数が大きくなるのを防ぐためであるが、ここでは一応30を引いたものについても平行的に計算を行なってみよう。

表 5 ・ 2 データ表(2)

A_1	A_2	A_3	A_4
1	2	-2	-3
2	2	2	-4
3	-1	0	-2
6	3	0	-9

$$CT^* = \frac{0^2}{12} = 0 \quad (5 \cdot 5)$$

(4) 総平方和 S_T

$$\begin{aligned} S_T &= 31^2 + 32^2 + \dots + 28^2 - CT \\ &= 10860 - 10800 = 60 \end{aligned} \quad (5 \cdot 6)$$

$$\begin{aligned} S_T^* &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (-2)^2 - CT^* \\ &= 60 - 0 = 60 \end{aligned} \quad (5 \cdot 7)$$

(5) 平方和 S_A の計算

$$\begin{aligned} S_A &= \sum_{i=1}^4 \frac{Y_{i\cdot}^2}{n_i} - CT \\ &= \frac{1}{3} (96^2 + 93^2 + 90^2 + 81^2) - 10800 \\ &= \frac{1}{3} (32526) - 10800 \\ &= 10842 - 10800 = 42 \end{aligned} \quad (5 \cdot 8)$$

$$\begin{aligned} S_A^* &= \frac{1}{3} (6^2 + 3^2 + 0^2 + (-9)^2) - 0 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 126 = 42 \end{aligned} \quad (5 \cdot 9)$$

(6) 残差平方和 S_E

$$\begin{aligned} S_E &= S_T - S_A \\ &= 60 - 42 = 18 \end{aligned} \quad (5 \cdot 10)$$

(7) 自由度

$$\left. \begin{aligned} \phi_A &= 4 - 1 = 3 \\ \phi_T &= 12 - 1 = 11 \\ \phi_E &= 11 - 3 = 8 \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 11)$$

(8) 分散分析表

要 因	平 方 和	自 由 度	不 偏 分 散	分 散 比
A 因 子	4.2	3	1.40	6.22*
	1.8	8	2.25	
計	6.0	11		

$$F(3.8; 0.05) = 4.07$$

よって因子は有意水準5%で有意である。すなわち $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ という仮説はすてゐる。あるいは A_1, A_2, A_3, A_4 間の差は偶然変動とみなすことはできない。

すなわち実際に差があると考えて良いということになる。

(9) 推 定 (4.5), (4.6)式を用いて

$$\left. \begin{aligned} \mu + \alpha_1 &= \bar{y}_{1\cdot} = 32.0 \\ \mu + \alpha_2 &= \bar{y}_{2\cdot} = 31.0 \\ \mu + \alpha_3 &= \bar{y}_{3\cdot} = 30.0 \\ \mu + \alpha_4 &= \bar{y}_{4\cdot} = 27.0 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

(10) 母数の信頼域

$\mu + \alpha_i$ の95%信頼区間は

$$\mu + \alpha_i : \mu + \alpha_i \pm t(\phi_E, 0.05) \cdot \sqrt{\frac{V_E}{n_i}} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \mu + \alpha_i &: 32.0 \pm t(8, 0.05) \sqrt{\frac{2.25}{3}} \\ &= 32.0 \pm 2.306 \cdot 0.865 \\ &= 32.0 \pm 2.0 \\ &= 30.0 \sim 34.0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

以下

$$\left. \begin{aligned} \mu + \alpha_2 &: 31.0 \pm 2.0 \\ &= 29.0 \sim 33.0 \\ \mu + \alpha_3 &: 30.0 \pm 2.0 \\ &= 28.0 \sim 32.0 \\ \mu + \alpha_4 &: 27.0 \pm 2.0 \\ &= 25.0 \sim 29.0 \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

これらを図示すると次図のようになる。矢印が95%の信頼区間を示している。

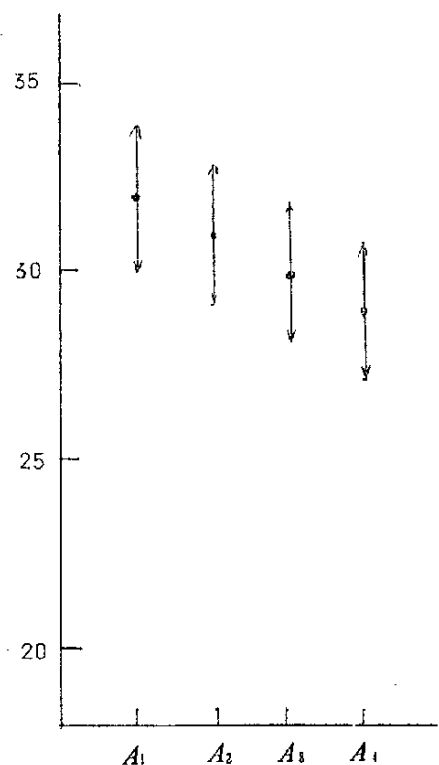


図 5-1 1 元配置における母数の信頼区間

§ 6 2 元配置 (繰返しなし)

因子の数が 2 個ある場合を 2 元配置と云う。

普通用いられているものは次のような手順で計算が進められる。

データのとり方は次に示すような形で行なわれる。

表 6・1 2 次配置データ表

因子 A \ 因子 B	因子 B				計
	B ₁	B ₂	 B _j	 B _b	
A ₁	y ₁₁	y ₁₂	y _{1j}	y _{1b}	Y _{1.}
A ₂	y ₂₁	y ₂₂	y _{2j}	y _{2b}	Y _{2.}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A _i	y _{i1}	y _{i2}	y _{ij}	y _{ib}	Y _{i.}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A _a	y _{a1}	y _{a2}	y _{aj}	y _{ab}	Y _{a.}
計	Y _{.1}	Y _{.2}	Y _{.j}	Y _{.b}	Y _{..}

構 造 模 形

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij}$$

(6 ・ 1)

$$(i = 1 \dots\dots a, j = 1 \dots\dots b)$$

μ : 総平均の母数

α_i : A 水準による主効果

β_j : B 水準による主効果

e_{ij} : $NID(0, \sigma^2)$

ただしこのままでは母数が多すぎるので条件を2つつけておく。

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^b \beta_j = 0$$

(6 ・ 2)

X表を作る。

表 6 ・ 2 X 表

μ	α_1	α_2	$\dots\dots\dots\alpha_a$	β_1	β_2	$\dots\dots\dots\beta_b$	デ-タ
1	1			1			y_{11}
1	1				1		y_{12}
$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$				$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$	1					1	y_{1b}
1		1		1			y_{21}
1		1			1		y_{22}
$\vdots$		$\vdots$			$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$			$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$			$\ddots$		$\vdots$
$\vdots$		1				1	y_{2b}
$\vdots$							$\vdots$
$\vdots$							$\vdots$
$\vdots$							$\vdots$
$\vdots$							$\vdots$
$\vdots$							$\vdots$
$\vdots$							$\vdots$
$\vdots$							$\vdots$
1				1			y_{a1}
1			1		1		y_{a2}
$\vdots$			$\vdots$				$\vdots$
$\vdots$			$\vdots$				$\vdots$
$\vdots$			$\vdots$				$\vdots$
1			1			1	y_{ab}

表 6 ・ 2 より A 表を作る。

表 6.3 A 表(1)

$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_a$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2 \dots \hat{\beta}_b$	$= B$
ab	b	b	a	a	Y_{00}
b	b		1	1	Y_{10}
b		b	1	1	Y_{20}
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
b		b	1	1	Y_{a0}
a	1	1	a		Y_{01}
a	1	1		a	Y_{02}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
a	1	1		a	Y_{0b}
	1	1			0
			1	1	0

下段の2行は $\sum \alpha_i = 0$, $\sum \beta_j = 0$ の条件に相当するものである。これを用いてA表を変換させる
させると

表 6.4 A 表(2)

$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2 \dots \hat{\alpha}_a$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2 \dots \hat{\beta}_b$	$= B$
ab					Y_{00}
b	b				Y_{10}
b		b			Y_{20}
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$
b		b			Y_{a0}
a			a		Y_{01}
a				a	Y_{02}
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$				$\vdots$	$\vdots$
a				a	Y_{0b}

これより

$$\left. \begin{aligned} ab\hat{\mu} &= Y_{..} \\ b\hat{\mu} + b\hat{\alpha}_i &= Y_{i.} \quad (i = 1 \dots\dots\dots a) \\ a\hat{\mu} + a\hat{\beta}_j &= Y_{.j} \quad (j = 1 \dots\dots\dots b) \end{aligned} \right\} \quad (6 \cdot 3)$$

が得られる。これを解いて

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{ab} Y_{..} = \bar{y}_{..} \\ \hat{\alpha}_i &= \frac{1}{b} Y_{i.} - \hat{\mu} = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \\ \hat{\beta}_j &= \frac{1}{a} Y_{.j} - \hat{\mu} = \bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..} \end{aligned} \right\} \quad (6 \cdot 4)$$

とすれば

$$\left. \begin{aligned} E(\hat{\mu}) &= \mu \\ E(\hat{\alpha}_i) &= \alpha_i \\ E(\hat{\beta}_j) &= \beta_j \end{aligned} \right\} \quad (6 \cdot 5)$$

を満足することがわかる。これより α_i , β_j などの推定値を求めることができる。

残差平方和 S_E は

$$\begin{aligned} S_E &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \hat{\mu} Y_{..} - \sum_i \hat{\alpha}_i Y_{i.} - \sum_j \hat{\beta}_j Y_{.j} \\ &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{1}{ab} Y_{..}^2 \\ &\quad - \sum_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) Y_{i.} \\ &\quad - \sum_j (\bar{y}_{.j} - \bar{y}_{..}) Y_{.j} \\ &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{1}{ab} Y_{..}^2 \\ &\quad - \left(\frac{1}{b} \sum_i Y_{i.}^2 - \frac{1}{ab} Y_{..}^2 \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{a} \sum_j Y_{.j}^2 - \frac{1}{ab} Y_{..}^2 \right) \end{aligned} \quad (6 \cdot 6)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 CT &= \frac{1}{ab} Y_{..}^2 \\
 S_A &= \frac{1}{b} \sum_i y_{i.}^2 - \frac{1}{ab} Y_{..}^2 \\
 &= \frac{1}{b} \sum_i Y_{i.}^2 - CT \\
 S_B &= \frac{1}{a} \sum_j Y_{.j}^2 - \frac{1}{ab} Y_{..}^2 \\
 &= \frac{1}{a} \sum_j Y_{.j}^2 - CT \\
 S_T &= \sum_i \sum_j y_{ij}^2 - CT
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

とおけば

$$S_E = S_T - S_A - S_B \tag{6.8}$$

が得られる。さて1元配置のときと同様にして帰無仮設をたてる。普通2元配置であれば

$$\begin{aligned}
 H_A : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0 \\
 H_B : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0
 \end{aligned}
 \tag{6.9}$$

の2つである。 H_A が成立するものとして S_E を求めると、(6.7)式を用いて

$$S_E(A) = S_T - S_B \tag{6.10}$$

が得られる。これより

$$S_E(A) - S_E = S_A \tag{6.11}$$

同様に

$$S_E(B) - S_E = S_B \tag{6.12}$$

である。これらを S_E に対して検定を行なえば十分である。これより次のような手順で分散分析を行なうことができる。

§ 7 2元配置(数值例)

表 7・1 データ表

	B_1	B_2	B_3	B_4	計
A_1	26	34	36	32	128
A_2	27	34	37	30	128
A_3	19	28	29	28	104
計	72	96	102	90	360

(1) 構造式

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij} \quad (i = 1 \dots 3, j = 1 \dots 4) \quad (7 \cdot 1)$$

$$\Sigma \alpha_i = 0, \quad \Sigma \beta_j = 0$$

(2) 帰無仮設

$$H_A : \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \quad (7 \cdot 2)$$

$$H_B : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0 \quad (7 \cdot 3)$$

(3) 修正項 CT

$$CT = \frac{1}{12} Y_{..}^2 = \frac{1}{12} (360)^2 \quad (7 \cdot 4)$$

$$= 10800$$

(4) A 平方和 S_A

$$S_A = \frac{1}{4} \Sigma Y_{i.}^2 - CT \quad (7 \cdot 5)$$

$$= \frac{1}{4} (128^2 + 128^2 + 104^2) - CT$$

$$= 10896 - 10800 = 96$$

(5) B 平方和 S_B

$$S_B = \frac{1}{3} \Sigma Y_{.j}^2 - CT \quad (7 \cdot 6)$$

$$= \frac{1}{3} (72^2 + 96^2 + 102^2 + 90^2) - CT$$

$$= 10968 - 10800 = 168$$

(6) 総平方和 S_T

$$S_T = \sum \sum y_{ij}^2 - CT \quad (7.7)$$

$$= 11076 - 10800 = 276$$

(7) 残差平方和 S_E

$$S_E = S_T - S_A - S_B$$

$$= 276 - 96 - 168$$

$$= 12 \quad (7.8)$$

(8) 分散分析表を作る

表 7.2 分散分析表

要因	平方和	自由度	不偏分数	分散比	$F(0.05)$
A	96	2	48	24*	5.14
B	168	3	56	28*	4.76
E	12	6	2		
T	276	11			

A も B も有意であるのでこれより A_i, B_j の効果を推定する。

$$\left. \begin{aligned} \mu + \alpha_i &= \frac{Y_{i.}}{4} \\ \mu + \beta_j &= \frac{Y_{.j}}{3} \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

$$\left. \begin{aligned} D^2(\mu + \alpha_i) &= \frac{1}{4} \sigma^2 \\ D^2(\mu + \beta_j) &= \frac{1}{3} \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

これより

$$\left. \begin{aligned} \mu + \alpha_1 &= 3.2 \\ \mu + \alpha_2 &= 3.2 \\ \mu + \alpha_3 &= 2.6 \\ \mu + \beta_1 &= 2.4 \\ \mu + \beta_2 &= 3.2 \\ \mu + \beta_3 &= 3.4 \\ \mu + \beta_4 &= 3.0 \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

よって、それぞれの95%信頼区間は $\widehat{\mu + \alpha_i}$ に対しては

$$t(6; 0.05) \sqrt{\frac{V_E}{4}} = 2.447 \times \sqrt{\frac{2}{4}} \quad (7.12)$$

$\widehat{\mu + \beta_j}$ に対しては

$$t(6; 0.05) \sqrt{\frac{V_E}{3}} = 2.447 \times \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (7.13)$$

をつければ良い。

2元配置のときの特徴の1つとしてはもし B の項を無視して A のみの1元配置として分散分析を行なえばこのとき平方和は $S_B + S_E = 180$ ，自由度 $\phi_B + \phi_E = 9$ であって， $V_E^* = 20$ となり A は有意ではない。すなわち B による効果を除くことで誤差を小にすることができる。

その2は $\mu + \alpha_i + \beta_j$ の推定における精度が良くなることである。もし普通の実験であれば $\mu + \alpha_i + \beta_j$ の所では1回しか実験していないのでその分散は σ^2 である。しかしこれを $\mu + \alpha_i + \beta_j$ で推定すれば

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \bar{\bar{y}} \\ \alpha_i &= \bar{y}_{i.} - \bar{\bar{y}} \\ \beta_j &= \bar{y}_{.j} - \bar{\bar{y}} \end{aligned} \right\} \quad (7.14)$$

これより

$$\mu + \alpha_i + \beta_j = \bar{y}_{i.} + \bar{y}_{.j} - \bar{\bar{y}} \quad (7.15)$$

で推定ができる。この分散は

$$\begin{aligned} D^2(\mu + \alpha_i + \beta_j) &= \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} \right) \sigma^2 \\ &= \frac{a + b - 1}{ab} \sigma^2 \end{aligned} \quad (7.16)$$

である。 $a = 3$ ， $b = 4$ とすれば，これは $\frac{1}{2} \sigma^2$ となってこれは2倍の精度をもつ。

すなわち1回しか実験していないのに2回繰返したのと同じ精度がえられている訳である。

§ 8 2元配置（繰返しあり）

先の構造模形では A_i の変化によって B_j の効果は変化がなかったが，場合によっては A_i の値によって B_j の効果が変わることがある。このようなとき， A と B の交互作用があると云う。このような交互作用を求めるためには2元配置では繰返し行なう必要がある。

図 8 - 1 主効果のみ

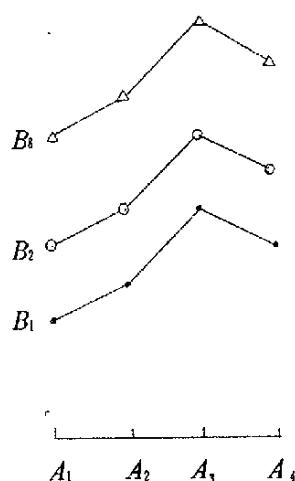
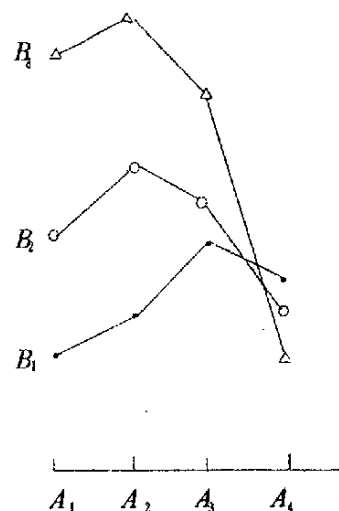


図 8 - 2 交互作用の 1 例



構造モデルは

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + e_{ijk} \quad (8 \cdot 1)$$

$$(i = 1 \dots a, j = 1 \dots b, k = 1 \dots v)$$

μ : 総平均の母数

α_i : A_i の主効果

β_j : B_j の主効果

$(\alpha\beta)_{ij}$: A_i , B_j の交互作用

e_{ijk} : 誤差項で $NID(0, \sigma^2)$ である。

このときこのままでは母数が多すぎるので条件をつけることが必要である。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^a \alpha_i &= 0, & \sum_{j=1}^b \beta_j &= 0 \\ \sum_{i=1}^a (\alpha\beta)_{ij} &= 0 & (j = 1 \dots b) \\ \sum_{j=1}^b (\alpha\beta)_{ij} &= 0 & (i = 1 \dots a) \end{aligned} \right\} \quad (8 \cdot 2)$$

制約条件は A について 1, B について 1, $A \times B$ (交互作用分) については $a + b - 1$ 個ある。よって A 項の自由度 $\phi_A = a - 1$, B 項の自由度 $\phi_B = b - 1$, $A \times B$ 項の自由度 $\phi_{A \times B} = ab - (a + b - 1) = (a - 1)(b - 1)$ である。

データの形は次のように与えられる。

	B_1	B_2		B_b	計
A_1	y_{111} y_{112} $\vdots$ $\vdots$ y_{11v}	y_{121} y_{122} $\vdots$ $\vdots$ y_{12v}		y_{1b1} y_{1b2} $\vdots$ $\vdots$ y_{1bv}	
小 計	$Y_{12.}$	$Y_{12.}$		$Y_{1b.}$	$Y_{1..}$
A_2	y_{221} y_{222} $\vdots$ $\vdots$ y_{22v}	y_{221} y_{222} $\vdots$ $\vdots$ y_{22v}		y_{2b1} y_{2b2} $\vdots$ $\vdots$ y_{2bv}	
小 計	$Y_{22.}$	$Y_{22.}$		$Y_{2b.}$	$Y_{2..}$
$\vdots$	$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$		$\vdots$ $\vdots$	$\vdots$ $\vdots$
A_a	y_{a11} y_{a12} $\vdots$ $\vdots$ y_{a1v}	y_{a21} y_{a22} $\vdots$ $\vdots$ y_{a2v}		y_{ab1} y_{ab2} $\vdots$ $\vdots$ y_{abv}	
小 計	$Y_{a1.}$	$Y_{a2.}$		$Y_{ab.}$	$Y_{a..}$
計	$Y_{.1.}$	$Y_{.2.}$		$Y_{.b.}$	$Y_{...}$

ここで

$$\begin{aligned}
 Y_{...} &= \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk} \\
 Y_{i..} &= \sum_j \sum_k y_{ijk} \\
 Y_{.j.} &= \sum_i \sum_k y_{ijk} \\
 Y_{ij.} &= \sum_k y_{ijk}
 \end{aligned}
 \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} Y_{...} \\ Y_{i..} \\ Y_{.j.} \\ Y_{ij.} \end{aligned}} \right\} \quad (8 \cdot 3)$$

前と同じような手続で次の計算を行なう。

(1) 修正項 CT を作る

$$CT = \frac{Y_{000}^2}{abr} \quad (8 \cdot 4)$$

(2) A 項の平方和 S_A を作る。

$$S_A = \frac{1}{br} \sum_{i=1}^a Y_{i00}^2 - CT \quad (8 \cdot 5)$$

(3) B 項の平方和 S_B を作る

$$S_B = \frac{1}{a \tau} \sum_{j=1}^b Y_{\cdot j}^2 - CT \quad (8 \cdot 6)$$

(4) AB の平方和 S_{AB} を作る。

$$S_{AB} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b Y_{ij}^2 - CT \quad (8 \cdot 7)$$

(5) 交互作用項の平方和 $S_{A \times B}$ を作る。

$$S_{A \times B} = S_{AB} - S_A - S_B \quad (8 \cdot 8)$$

(6) 総平方和 S_T を求める。

$$S_T = \sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - CT \quad (8 \cdot 9)$$

(7) 残差平方和 S_E を求める。

$$S_E = S_T - S_{AB} \quad (8 \cdot 10)$$

(8) 分散分析表を作る

表 8.1 分散分析表

要因	平方和	自由度	不偏分散	分散比
A	S_A	$\phi_A = a - 1$	$V_A = S_A / \phi_A$	$F_A = V_A / \mathcal{N}_E$
B	S_B	$\phi_B = b - 1$	$V_B = S_B / \phi_B$	$F_B = V_B / \mathcal{N}_E$
$A \times B$	$S_{A \times B}$	$\phi_{A \times B} = (a-1)(b-1)$	$V_{A \times B} = S_{A \times B} / \phi_{A \times B}$	$F_{A \times B} = V_{A \times B} / \mathcal{N}_E$
AB	S_{AB}	$\phi_{AB} = ab - 1$		
E	S_E	$\phi_E = ab(\tau - 1)$	$V_E = S_E / \phi_E$	
T	S_T	$\phi_T = abr - 1$		

$$\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i = \bar{y}_{i..} = \frac{1}{br} Y_{i..}$$

$$\hat{\mu} + \hat{\beta}_j = \bar{y}_{\cdot j \cdot} = \frac{1}{a\tau} Y_{\cdot j \cdot}$$

$$\hat{\mu} = \bar{y} \dots = \frac{1}{ab\tau} Y \dots$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\alpha}_i &= \bar{y}_{i00} - \bar{\bar{y}}_{000} \\ \hat{\beta}_j &= \bar{y}_{0j0} - \bar{\bar{y}}_{000} \\ (\hat{\alpha\beta})_{ij} &= \bar{y}_{ij0} - \bar{y}_{i00} - \bar{y}_{0j0} + \bar{\bar{y}}_{000} \end{aligned} \right\} \quad (8 \cdot 11)$$

$$\left. \begin{aligned} D^2 - (\hat{\mu}) &= \frac{1}{a b r} \sigma^2 \\ D^2 - (\hat{\alpha}_i) &= \left(\frac{1}{b r} - \frac{1}{a b r} \right) \sigma^2 \\ &= \frac{a-1}{a b r} \sigma^2 \\ D^2 - (\hat{\beta}_j) &= \left(\frac{1}{a r} - \frac{1}{a b r} \right) \sigma^2 \\ &= \frac{b-1}{a b r} \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (8 \cdot 12)$$

$$\left. \begin{aligned} D^2 (\mu + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + (\hat{\alpha\beta})_{ij}) \\ &= \left(\frac{1}{a b r} + \frac{a-1}{a b r} + \frac{b-1}{a b r} + \frac{(a-1)(b-1)}{a b r} \right) \sigma^2 \\ &= \frac{a b}{a b r} \sigma^2 = \frac{1}{r} \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (8 \cdot 13)$$

$$\mu + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j + (\hat{\alpha\beta})_{ij} = \bar{y}_{ij0}$$

§ 9 直交表による計画

最近工業方面では直交表による実験計画が行なわれている。これは因子の数が多くなると既述の要因実験では実験個数が多くなりすぎる。たとえば5因子2水準としてもすでに32個を要し、さらに10因子をとりあげるとなれば1024個を要する。これをもっと少ない個数で実験しようという訳である。

この割りつけを行なうのが直交表である。

この表には色々の種類があるが末尾に上げたのは数値表Bにのっているものである。ここには 2^n 型と 3^n 型とがのせてある。またよくこの表による割りつけが実際に用いられている。ここでは 2^n 型についてのと 3^n 型についての簡単な説明をのべることにする。

種々の変形はあるが基本的には 2^n 型のときは因子はすべて2水準であり、 3^n 型のときはすべて3水準にとる方が理解が容易である。

次のような実験を考える。因子はA, B, Cで主効果のみを問題とし、水準はすべて2水準である。このとき構造式は

$$\begin{aligned}
 y_{ijk} &= \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijk} \\
 (i &= 1, 2; j = 1, 2; k = 1, 2) \\
 \alpha_1 + \alpha_2 &= 0 \\
 \beta_1 + \beta_2 &= 0 \\
 \gamma_1 + \gamma_2 &= 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} (9 \cdot 1) \\ \\ \\ (9 \cdot 2) \end{array}$$

もし前述のような要因実験であると $2 \times 2 \times 2 = 8$ 回の実験を必要とするが、もし主効果のみ知れば良いのであれば 4 回の実験で目的を達し得る。直交表 2^n 型をみて

表 9・1 直 交 表

4	+	+	+
3	-	+	-
2	+	-	-
1	-	-	+
No	A	B	C

実験 #1 は $A_1 B_1 C_1$, #2 は $A_2 B_1 C_1$, #3 は $A_1 B_2 C_1$, #4 は $A_2 B_2 C_1$ の条件で行なうとする。これは #1 は A の所が $\ominus$, B の所が $\ominus$, C が $\oplus$ であることより, $\ominus$ を $1 \oplus$ を 2 とおきかえれば得られる。以下同様である。このようにすると (10・2) 式より, 条件式より $\alpha_1 = -\alpha_2$, $\beta_1 = -\beta_2$, $\gamma_1 = -\gamma_2$ であるので

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -\alpha, \alpha_2 = +\alpha, \\
 \beta_1 &= -\beta, \beta_2 = +\beta, \\
 \gamma_1 &= -\gamma, \gamma_2 = +\gamma,
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (9 \cdot 3)$$

とおくことができるので X 表として表 9・2 を得る。

表 9・2 X 表

μ	α	β	γ	データ
1	-1	-1	1	y_1
1	1	-1	-1	y_2
1	-1	1	-1	y_3
1	1	1	1	y_4

これを用いて A 表を作れば表 9・3 を得る。

表 9・3 A 表

$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\gamma}$	B	
4	0	0	0	$y_1 + y_2 + y_3 + y_4$	$= T$
0	4	0	0	$-y_1 + y_2 - y_3 + y_4$	$= A$
0	0	4	0	$-y_1 - y_2 + y_3 + y_4$	$= B$
0	0	0	4	$y_1 - y_2 - y_3 + y_4$	$= C$

すなわち対角線以外は 0 である。このために計算が容易となっている。これが直交表の名の起りである。すなわち、 μ の列、 α の列、 β の列、 γ の列をそれぞれベクトルとすると、 μ と α との内積を作ると、 $1 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 1 = 0$ 、また μ と β との内積は $1 \times (-1) + 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 0$ 、その他も同様である。ベクトルの内積が 0 であるとき、2 つのベクトルは直交しているという。A 表を用いれば $\hat{\mu}$ 、 $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ 、 $\hat{\gamma}$ の値は簡単に求めることができる。またその分散を求めることもできる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mu} &= \frac{1}{4} (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{4} T \\ \hat{\alpha} &= \frac{1}{4} (-y_1 + y_2 - y_3 + y_4) = \frac{1}{4} A \\ \hat{\beta} &= \frac{1}{4} (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4) = \frac{1}{4} B \\ \hat{\gamma} &= \frac{1}{4} (y_1 - y_2 - y_3 + y_4) = \frac{1}{4} C \end{aligned} \right\} \quad (9 \cdot 4)$$

$$\left. \begin{aligned} D^2(\mu) &= \frac{1}{4} \sigma^2 \\ D^2(\alpha) &= \frac{1}{4} \sigma^2 \\ D^2(\beta) &= \frac{1}{4} \sigma^2 \\ D^2(\gamma) &= \frac{1}{4} \sigma^2 \end{aligned} \right\} \quad (9 \cdot 5)$$

分散分析表を作るためには S_T 、 S_A 、 S_B 、 S_C を作る必要がある。

$$\begin{aligned} S_T &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 - \frac{1}{4} T^2 \\ S_A &= \frac{1}{4} A^2 \end{aligned}$$

$$S_B = \frac{1}{4} B^2 \quad (9.6)$$

$$S_C = \frac{1}{4} C^2$$

$$S_A + S_B + S_C = S_T$$

$$\phi_A = \phi_B = \phi_C = 1 \quad (9.7)$$

が成立する。これより分散分析表は表 9.4 を得る

表 9.4 分散分析表

変 因	平 方 和	自 由 度	不 偏 分 散	分 散 比
<i>A</i>	S_A	$\phi_A = 1$	$\bar{V}$	
<i>B</i>	S_B	$\phi_B = 1$	$\bar{V}$	
<i>C</i>	S_C	$\phi_C = 1$	$\bar{V}$	
<i>T</i>	S_T	$\phi_T = 3$		

となる。

§ 10 2^n 型の 1 例

たとえば因子, *A*, *B*, *C*, *D* の 4 因子で各因子は 2 水準とする。このとき交互作用 *A*×*B* を求める必要があるが他の因子は交互作用がないということがわかっているとすればこの母数の推定値は 8 個の実験で求めることができる。もしこれを要因実験で行なえば $2^4 = 16$ 回を必要とするわけである。ただしこの場合はすべての 2 因子交互作用を求めることが可能である。すなわち 2^n 型の場合は不用の情報を犠牲にして実験回数の方を減らしているのである。

求めるべき母数, *A*, *B*, *C*, *D* の主効果と *A*×*B* の交互作用として 2^n 型直交表にわりつけると表 10.1 を得る。ただしこれは一例であって他にも種々のわりつけを行なうことができる。

表 1 0 ・ 1 要因のわりつけ

	A	B	C	D	E	F	G
実 験 順	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
8	+	+	+	+	+	+	+
7	-	+	-	+	-	+	-
6	+	-	-	+	+	-	-
5	-	-	+	+	-	-	+
4	+	+	+	-	-	-	-
3	-	+	-	-	+	-	+
2	+	-	-	-	-	+	+
1	-	-	+	-	+	+	-
割 り つ け	A	B	$A \times B$	C	e_1	e_2	D

割りつけの方法には色々あるがこれを行なうのに便利な方法として田口の線点図がある。
この一例を図 1 0 ・ 1 に示す。

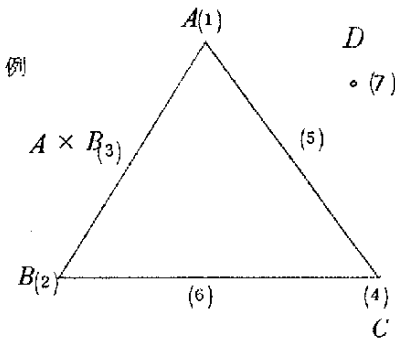


図 1 0 . 1 線点図の 1 例

図 1 0 ・ 1 より第(1)行に A を，第 2 行に B を，第 3 行に $A \times B$ を，第 4 行に C を，第 7 行に D を割りつけておく。残りの(5)，(6)行からは誤差項が得られる。

表 1 0 ・ 3 割りつけ表

実験の順序	実験の条件				データ
順 1	A_1	B_1	C_1	D_1	y_1
順 2	A_2	B_1	C_1	D_2	y_2
順 3	A_1	B_2	C_1	D_2	y_3
順 4	A_2	B_2	C_1	D_1	y_4
順 5	A_1	B_1	C_2	D_2	y_5
順 6	A_2	B_1	C_2	D_1	y_6
順 7	A_1	B_2	C_2	D_1	y_7
順 8	A_2	B_2	C_2	D_2	y_8

これより解く。

$$\left. \begin{aligned} T &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 \\ A &= -y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7 + y_8 \\ B &= -y_1 - y_2 + y_3 + y_4 - y_5 - y_6 + y_7 + y_8 \\ C &= -y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + y_8 \\ D &= -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 + y_5 - y_6 - y_7 + y_8 \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

とおく。

構造式は

$$y_i = \mu + \alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i + (\alpha\beta)_i + e_i \quad (10.2)$$

($i = 1, \dots, 8$)

α は A の, β は B の, γ は C , δ は D の主効果で, $(\alpha\beta)$ は $A \times B$ の交互作用, e は誤差項である。

総平方和を S_T , A の平方和を S_A , B の平方和を S_B , C の平方和を S_C , D の平方和を S_D , $A \times B$ の平方和を $S_{A \times B}$, 残差項を S_e とおけば

$$\left. \begin{aligned} S_T &= \frac{1}{8} T^2 \\ S_A &= \frac{1}{8} A^2 \\ S_B &= \frac{1}{8} B^2 \\ S_C &= \frac{1}{8} C^2 \\ S_D &= \frac{1}{8} D^2 \\ S_{A \times B} &= \frac{1}{8} (AB)^2 \\ S_e &= \frac{1}{8} e_1^2 + \frac{1}{8} e_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} (AB) &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4 + y_5 - y_6 - y_7 + y_8 \\ e_1 &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 - y_5 + y_6 - y_7 - y_8 \\ e_2 &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4 - y_5 - y_6 + y_7 + y_8 \end{aligned} \right\} \quad (10.4)$$

ただし S_e については

$$S_e = \Sigma y^2 - (S_A + S_B + S_C + S_D + S_{A \times B}) \quad (10.5)$$

で求めても同じ値が得られる。これより分散分析表を作れば

表 10・3 分散分析表

要 因	平 方 和	自 由 度	不 偏 分 散	分 散 比
A	S_A	1	$V_A = S_A$	$F_A = V_A/V_e$
B	S_B	1	$V_B = S_B$	$F_B = V_B/V_e$
C	S_C	1	$V_C = S_C$	$F_C = V_C/V_e$
D	S_D	1	$V_D = S_D$	$F_D = V_D/V_e$
$A \times B$	$S_{A \times B}$	1	$V_{A \times B} = S_{A \times B}$	$F_{A \times B} = V_{A \times B}/V_e$
e	S_e	2	$V_e = S_e/2$	
T	S_T	7		

後は通常の分散分析と同じに行なえば良い。

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\alpha} &= \frac{1}{8} A \\
 \hat{\beta} &= \frac{1}{8} B \\
 \hat{\gamma} &= \frac{1}{8} C \\
 \hat{\delta} &= \frac{1}{8} D \\
 (\hat{\alpha}\beta) &= \frac{1}{8} (AB)
 \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

で推定値が得られる。 α の 95% の信頼区間は

$$\alpha : \hat{\alpha} \pm t(\phi_e, 0.05) \cdot \sqrt{\frac{V_e}{8}} \quad (10.7)$$

で与えられる。他のものについても同様である。

§ 11 3^n 型の実験計画

これも 2^n 型のとほとんど同じである。ただし各因子が 3 水準であるので自由度が 2 つづつとられることと、交互作用は自由度が 4 なので 2 列とる必要があることに注意をする。

直交表は 3^n 型を用いる。前と同じ因子として A, B, C, D をとり、 $A \times B$ の交互作用を考えると、列の数は 6 列を必要とする。このためには 27 回の実験を行なう必要がある。たとえば割りつけとして、

第 1 列	A
第 2 列	B
第 3 列	(AB)
第 4 列	(AB^2)
第 5 列	C
第 6 列	D

とおけば良い。勿論誤差の分としては残り 7 行があるので必要とあればまだいくつかの因子を割りふることが可能である。

実験 1 の実験は

表 11・1 水準のふりわり

A	B	(AB)	(AB^2)	C	D
0	0	0	0	0	0

であるので A_0, B_0, C_0, D_0 の条件で行なえば良い。 A の 3 水準を A_0, A_1, A_2 で示す。残りの因子についても同様である。同じように実験 2 の実験は A_1, B_0, C_0, D_1 の条件で行なわれる。勿論実際の実験の順序はランダムに行なり必要がある。実験 1 は目印しのための番号である。このようにして全体で 27 個の実験が行なわれたとする。

解 析 法

$$\begin{aligned}
 T &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + \cdots \cdots \cdots + y_{16} + y_{17} \\
 A_0 &= y_1 + y_4 + y_7 + y_{10} + y_{13} + y_{16} + y_{19} + y_{22} + y_{25} \\
 A_1 &= y_2 + y_5 + y_8 + y_{11} + y_{14} + y_{17} + y_{20} + y_{23} + y_{26} \\
 A_2 &= y_3 + y_6 + y_9 + y_{12} + y_{15} + y_{18} + y_{21} + y_{24} + y_{27} \\
 B_0 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{19} + y_{20} + y_{21} \\
 B_1 &= y_4 + y_5 + y_6 + y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{22} + y_{23} + y_{24} \\
 B_2 &= y_7 + y_8 + y_9 + y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{25} + y_{26} + y_{27} \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{11.1}$$

勿論 (11.2) 式はすべてについて成立する。

$$\begin{aligned}
 A_0 + A_1 + A_2 &= T \\
 B_0 + B_1 + B_2 &= T \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{11.2}$$

が成り立つ。

構造式が前と同様に

$$\begin{aligned}
 y_{(i)} &= \mu + \alpha_{(i)} + \beta_{(i)} + \gamma_{(i)} + \delta_{(i)} + (\alpha\beta)_{(i)} + e_{(i)} \\
 (i &= 1, 2, \dots, 27)
 \end{aligned}
 \tag{11.3}$$

とする。

主効果の推定は (11.4) 式で、平方和は (11.5) 式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 \hat{\mu} &= \frac{1}{27} T \\
 \hat{\alpha}_0 &= \frac{1}{9} A_0 - \hat{\mu} \\
 \hat{\alpha}_1 &= \frac{1}{9} A_1 - \hat{\mu} \\
 \hat{\alpha}_2 &= \frac{1}{9} A_2 - \hat{\mu} \\
 \hat{\beta}_0 &= \frac{1}{9} B_0 - \hat{\mu} \\
 \hat{\beta}_1 &= \frac{1}{9} B_1 - \hat{\mu} \\
 \hat{\beta}_2 &= \frac{1}{9} B_2 - \hat{\mu} \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

$$\left. \begin{aligned}
 S_T &= \sum y_{(i)}^2 - \frac{1}{27} T^2 \\
 S_A &= \frac{1}{9} A_0^2 + \frac{1}{9} A_1^2 + \frac{1}{9} A_2^2 - \frac{1}{27} T^2 \\
 &= \frac{1}{9} (A_0^2 + A_1^2 + A_2^2) - \frac{1}{27} T^2 \\
 S_B &= \frac{1}{9} (B_0^2 + B_1^2 + B_2^2) - \frac{1}{27} T^2 \\
 &\vdots \\
 &\vdots
 \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

交互作用についても同様に (11.6), (11.7) 式を用いて平方和が求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 (AB)_0 &= y_1 + y_6 + y_8 + y_{10} + y_{15} + y_{17} + y_{19} + y_{24} + y_{26} \\
 (AB)_1 &= y_2 + y_4 + y_9 + y_{11} + y_{13} + y_{18} + y_{20} + y_{22} + y_{27} \\
 (AB)_2 &= y_3 + y_5 + y_7 + y_{12} + y_{14} + y_{16} + y_{21} + y_{23} + y_{25} \\
 (AB^2)_0 &= y_1 + y_5 + y_9 + y_{10} + y_{14} + y_{18} + y_{19} + y_{23} + y_{27} \\
 (AB^2)_1 &= y_2 + y_6 + y_7 + y_{11} + y_{15} + y_{16} + y_{20} + y_{24} + y_{25} \\
 (AB^2)_2 &= y_3 + y_4 + y_8 + y_{12} + y_{13} + y_{17} + y_{21} + y_{22} + y_{26}
 \end{aligned} \right\} \quad (11.6)$$

$$\left. \begin{aligned}
 S_{AB} &= \frac{1}{9} (AB)_0^2 + \frac{1}{9} (AB)_1^2 + \frac{1}{9} (AB)_2^2 - \frac{1}{27} T^2 \\
 S_{AB^2} &= \frac{1}{9} (AB^2)_0^2 + \frac{1}{9} (AB^2)_1^2 + \frac{1}{9} (AB^2)_2^2 - \frac{1}{27} T^2 \\
 S_{A \times B} &= S_{AB} + S_{AB^2} \\
 S_e &= S_T - (S_A + S_B + S_C + S_D + S_{A \times B})
 \end{aligned} \right\} \quad (11.7)$$

これを用いて分散分析表が作られる。

自由度は

$$\left. \begin{aligned} \phi_A = \phi_B = \phi_C = \phi_D &= 2 && (\text{主 効 果}) \\ \phi_{A \times B} &= 2 \times 2 = 4 && (\text{交 互 作 用}) \end{aligned} \right\} \quad (11.8)$$

表 11.2 分散分析表

要 因	平 方 和	自 由 度	不 偏 分 散	分 散 比
<i>A</i>	S_A	2	$V_A = S_A / 2$	$F_A = V_A / \mathcal{N}_E$
<i>B</i>	S_B	2	$V_B = S_B / 2$	$F_B = V_B / \mathcal{N}_E$
<i>C</i>	S_C	2	$V_C = S_C / 2$	$F_C = V_C / \mathcal{N}_E$
<i>D</i>	S_D	2	$V_D = S_D / 2$	$F_D = V_D / \mathcal{N}_E$
$A \times B$	$S_{A \times B}$	4	$V_{A \times B} = S_{A \times B} / 4$	$F_{A \times B} = V_{A \times B} / \mathcal{N}_E$
<i>e</i>	S_e	14	$V_e = S_e / 14$	
<i>T</i>	S_T	26		

あ と が き

これで最小二乗法とその応用として回帰式の解き方，すなわち母数の推定と，要因実験における分散分析および 2^n 型， 3^n 型の実験について述べてきた。これらの項目は実験計画法の一部であり，これ以外にも分割実験，変量模型による実験等々種々な実験があり，特に最近は誤差における $NID(0, \sigma^2)$ の仮定を課さないでとくに多変量の問題とか，また母数間にある関係を求める問題（成分分析）とかその他が実行されるようになった。というのは計算機の発達で相当複雑な計算でも実行可能となってきたからである。多変量とか時系列の問題は実用化するためには計算機は不可欠であるといって良い。これらの点について勉強したい人は更にその専門書について当ってみることをおすすめする。

例 題

(F O R T R A N によるプログラム)

問 1. $x_1, x_2, \dots, x_n$ を与えて算術平均を求める。

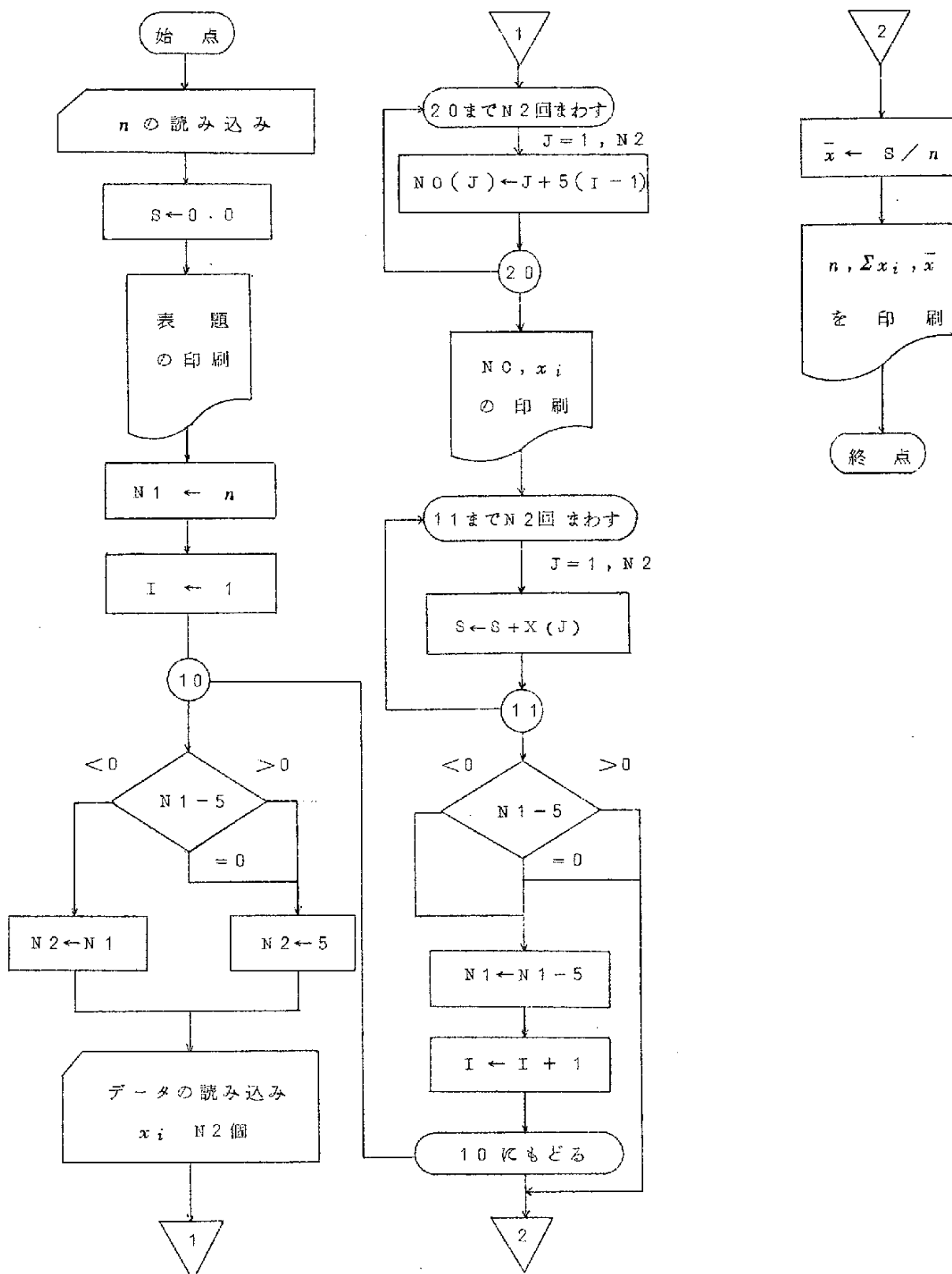
$$\begin{aligned} \text{数 式} \quad \bar{x} &= \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

記 号 $\bar{x}$: X B A R
 n : N
 x_i : X (I)
 $\sum x_i$: S

例 $n = 13$

$x_1 = 91.40$	$x_2 = 91.60$	$x_3 = 92.50$	$x_4 = 90.60$
$x_5 = 89.90$	$x_6 = 88.40$	$x_7 = 89.40$	$x_8 = 90.80$
$x_9 = 90.00$	$x_{10} = 89.50$	$x_{11} = 88.40$	$x_{12} = 87.00$
$x_{13} = 91.60$			

フローチャート



```

C      HEIKIN NO KEISAN
      READ 510,N
510   FORMAT(13)
      DIMENSION X(5),NO(5)
      S=0.0
      PRINT 610
610   FORMAT(1H1,20X,16HHEIKIN NO KEISAN)
      PRINT 611
611   FORMAT(1H0,5HDATA ,5(2X,2HNO,4X,1HX,3X))
      N1=N
      I=1
      10   IF(N1-5)110,120,120
110   N2=N1
      GO TO 310
120   N2=5
310   READ520,(X(J),J=1,N2)
520   FORMAT(6F12.0)
      DO 20 J=1,N2
      NO(J)=J+(I-1)*5
      20   CONTINUE
      PRINT 620,( NO(J),X(J) ,J=1,N2)
620   FORMAT(1H ,5X,5(2X,I2,F8.2))
      DO11J=1,N2
      S=S+X(J)
      11   CONTINUE
      IF(N1-5)210,210,230
230   N1=N1-5
      I=I+1
      GO TO 10
210   AN=N
      XBAR=S/AN
      PRINT 630,N,S,XBAR
630   FORMAT(1H0,8X,1HN,3X,1H=,3X,I2/1H ,8X,1HS,
      13X,1H=,F9.1/1H,7X,6HXBAR =,F13.5)
      CALL EXIT
      END

```


HEIKIN NO KEISAN

DATA	NO	X	NO	X	NO	X	NO	X	NO	X
	1	91.40	2	91.60	3	92.50	4	90.60	5	89.90
	6	88.40	7	89.40	8	90.80	9	90.00	10	89.50
	11	88.40	12	87.00	13	91.60				

N = 13

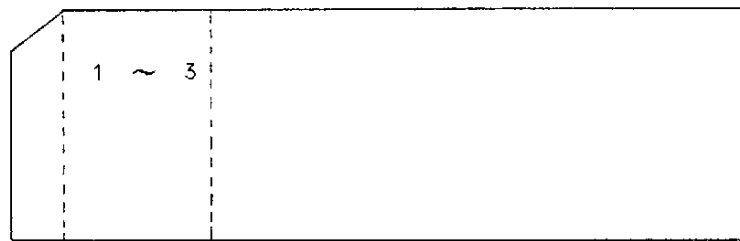
S = 1171.1

XBAR = 90.08461

説明

(1) n の読み込み

```
READ 510, N
510 FORMAT (I3)
```



第1枚目のデータカードの第1～3列にデータ個数 n をわりつける。

(2) 準備

```
DIMENSION X(5), NO(5)
S = 0.0
```

$x_1, x_2, \dots, x_5$ までと $no_1, no_2, \dots, no_5$ までとを印刷のために場所をとっておく。和を考えるために S に 0.0 を入れて前の値を消しておく。

(3) 表題の印刷

```
PRINT 610
610 FORMAT(1H1, 20X, 16H HEIKIN NO KEISAN)
PRINT 611
611 FORMAT(1H0, 5HDATA, 5(2X, 2HNO, 4X, 1HX, 3X))
```

改ページをして新しいページを出す。

HEIKIN NO KEISAN

DATA NO X NO X NO X

と印刷する。

(4) データ読み込みの準備

N1=N

I = 1

10 IF(N1-5) 110, 120, 120

110 N2=N1

GOTO 310

120 N2=5

N1 の値は変わってしまうのでNを崩さないようにしておく。I = 1としてIをふやす準備をする。IFを用いて、 $N1-5 < 0$ のとき、 $N2=N1$ 、 $N1-5 \geq 0$ のとき $N2=5$ とする。

(5) データの読み込み

310 READ 520, (X(J), J=1, N2)

520 FORMAT (6F12.0)

カードに

列 番

2 枚目	1~12	13~24	25~36	37~48	49~60	
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3 枚目	1~12	13~24	25~36	37~48	49~60	
	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	

の順に入っている。これを1枚読んで $x_1, x_2, \dots, x_5$ を $X(1), X(2), \dots, X(5)$ の順に入れる。FORMATでは一応6個までとってあるがデータは5個までに入っている。これは $N2 \leq 5$ で与えられる。

(6) NO(J)の準備をする。

DO 20 J=1, N2

$$NO(J) = J + (I - 1) * 5$$

200 CONTINUE

$NO(1), NO(2), \dots, NO(5)$ に最初は, 1, 2, 3, 4, 5 が次に 6, 7, 8, 9, 10 ... が入る。

(7) $NO(J)$ と $X(J)$ の印刷

PRINT 620, (NO(J), X(J), J=1, N2)

620 FORMAT(1H, 5X, 5(2X, I2, F8.2))

これで(3) で印刷したものの下に

DATA	NO	X	NO	...	NO	X
	1	91.40	2	...	5	89.90
	:	:	:		:	:

のように印刷される。

(8) 和 S の計算

DO 11 J=1, N2

S=S+X(J)

11 CONTINUE

始め S には 0.0 が入っている。よって, $J=1$ のとき, $S=x_1$ となり $J=2$ のとき $S=x_1+x_2$, $J=3$ のとき $S=x_1+x_2+x_3$, となり $J=5$ までで $S=x_1+x_2+\dots+x_5$ が入る。ついで $S=x_1+x_2+\dots+x_{10}$ となり, 最終的に $S=x_1+x_2+\dots+x_n$ まで入る。

(9) (4) ~ (8) までの繰返し。

IF (N1-5) 210, 210, 230

230 N1=N1-5

I=I+1

GO TO 10

$N1$ は $I=1$ のときは n に等しく, $I=2$ になれば $n-5$, $I=3$ のときは $n-10$ である。残りが 5 以下になればもうつづける必要がないので終る。

(10) $\bar{X}$ を作る。

210 AN=N

$\bar{X} = S / AN$

N のままでは割れないので AN としておく。

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$$

を求めるために S/AN を作り $XBAR$ に入れる。

(11) $N, S, XBAR$ の印刷

```
PRINT 630, N, S, XBAR
630 FORMAT(1H0, 8X, 1HN, 3X, 1H=, 3X, I2, 1H., /8X, 1HS,
3X, 1H=, F9.1/, 7X, 6HXBAR=, F13.5)
```

これで

```
N      =      13.
S      =  1171.1
X BAR  =    90.08461
```

のごとく印刷される。

(12) 終 点

```
CALL EXIT
END
```

以上でプログラムは完了する。

問2. $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ を与えて平方和と積和を求める。

数 式

$$S_x = \sum (x_i - \bar{x})^2$$

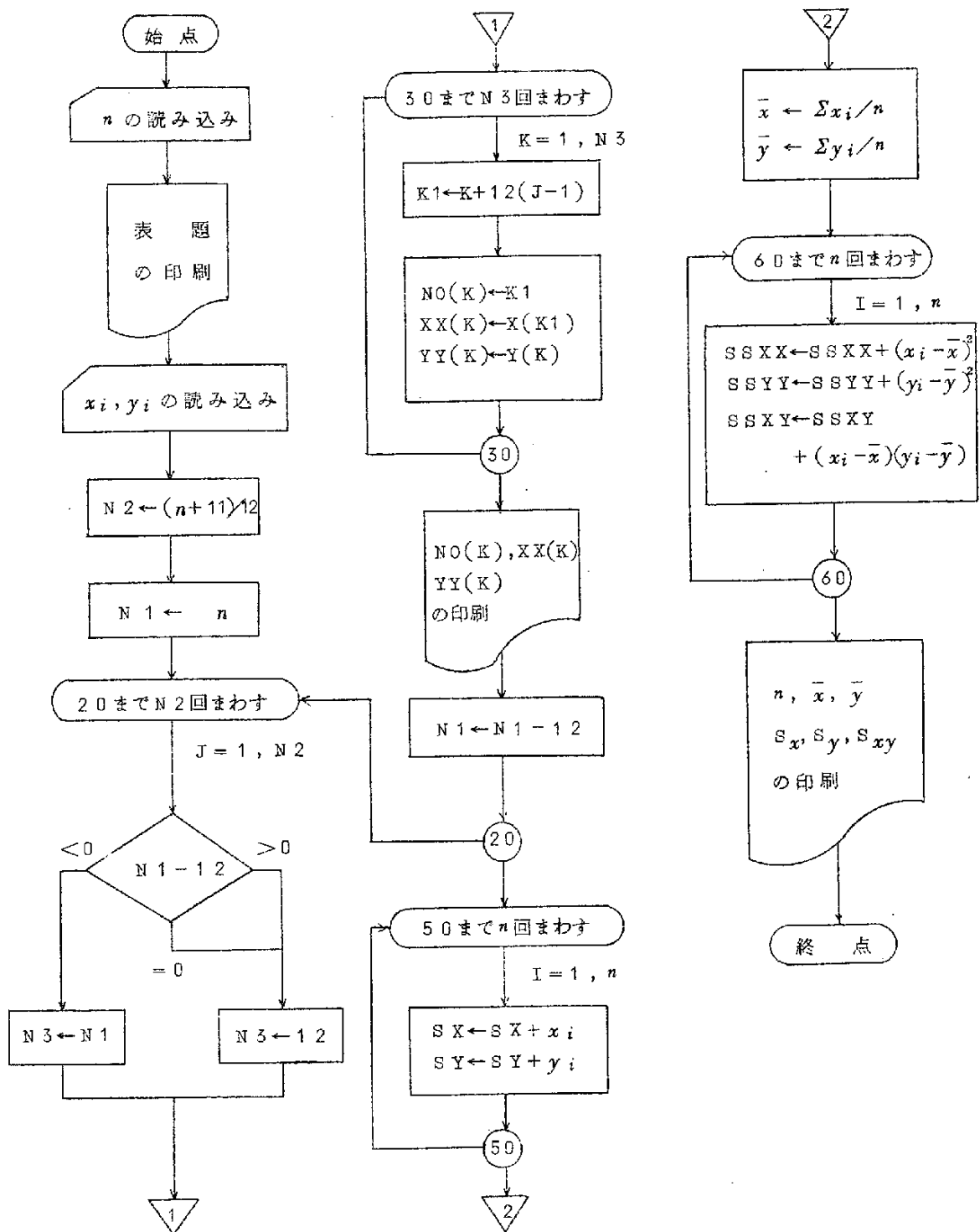
$$S_y = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

$$S_{xy} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

記 号

```
xi : X(I)
yi : Y(I)
Sx : SSXX
Sy : SSYY
Sxy : SSXY
Σxi : SX
Σyi : SY
```

フローチャート



```

C      HEIHOWA NO KEISAN
      READ 510,N
510   FORMAT(I3)
      DIMENSION X(100),Y(100),NO(12),XX(12),YY(12)
      SSXX=0.0
      SSXY=0.0
      SSYY=0.0
      SX=0.0
      SY=0.0
      PRINT 610
610   FORMAT(1H1,20X,17HHEIHOWA TO SEKIWA)
      PRINT 611
611   FORMAT(1H0,4HDATA)
      READ 520,(X(J),Y(J),J=1,N)
520   FORMAT(6F12.0)
      N2=(N+11)/12
      N1=N
      DO 20 J=1,N2
      IF(N1-12)110,120,120
110   N3=N1
      GO TO 310
120   N3=12
310   DO 30 K=1,N3
      K1=K+(J-1)*12
      NO(K)=K1
      XX(K)=X(K1)
      YY(K)=Y(K1)
30   CONTINUE
      PRINT 620,(NO(K),K=1,N3)
620   FORMAT(1H0,5H NO,12(I4,2X))
      PRINT 630,(XX(K),K=1,N3)
630   FORMAT(1H,5H X,12(F6.2))
      PRINT 640,(YY(K),K=1,N3)
640   FORMAT(1H,5H Y,12(F6.2))
      N1=N1-12
20   CONTINUE
      DO 50 I=1,N

```

```

      SX= SX+X(I)
      SY= SY+Y(I)
50  CONTINUE
      AN=N
      XBAR= SX/AN
      YBAR= SY/AN
      DO 60 I=1, N
        SSXX=SSXX+(X(I)-XBAR)**2
        SSYY=SSYY+(Y(I)-YBAR)**2
        SSXY=SSXY+(X(I)-XBAR)*(Y(I)-YBAR)
60  CONTINUE
      PRINT 651
651  FORMAT(1H0,5HKEKKA)
      PRINT 652, N
652  FORMAT(1H ,7H N =,I6)
      PRINT 653, XBAR
653  FORMAT(1H ,7H XBAR =,F12.5)
      PRINT 654, YBAR
654  FORMAT(1H ,7H YBAR =,F12.5)
      PRINT 655, SSXX
655  FORMAT(1H ,7H SSXX =,F12.5)
      PRINT 656, SSXY
656  FORMAT(1H ,7H SSXY =,F12.5)
      PRINT 657, SSYY
657  FORMAT(1H ,7H SSYY =,F12.5)
      CALL EXIT
      END

```

HEIHOWA TO SEKIWA

DATA												
NO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	1.86	1.82	1.89	1.85	1.88	1.84	1.88	1.87	1.84	1.91	1.89	1.85
Y	91.40	91.60	92.50	90.60	89.90	88.40	89.40	90.80	90.00	9.50	88.40	87.00
NO	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
X	1.94	1.88	1.89	1.91	1.86	1.90	1.90	1.89	1.93	1.87	1.89	1.91
Y	91.60	89.00	86.80	89.70	90.30	87.60	89.10	87.00	88.50	9.30	87.80	87.20
NO	25	26	27	28	29	30						
X	1.86	1.93	1.95	1.97	1.94	1.88						
Y	88.60	85.50	86.00	87.50	87.00	85.90						

KEKKA

N = 30.
 XBAR = 1.88933
 YBAR = 88.79666
 SSXX = .03658
 SSXY = -.76806
 SSYY = 98.30965

(1) データ個数 n の読み込み

```

      READ 510, N
      510 FORMAT (I3)
  
```

これは前の問題と同じ。

(2) データ読み取り, 計画の準備

```

      DIMENSION X(100), Y(100), NO(12), XX(12),
     & YY(12)
      SSXX=0.0
      SSXY=0.0
      SSYY=0.0
      SX  =0.0
      SY  =0.0
  
```

データは全部一度に読み込むことにして $n=100$ まで処理が可能である。

$NO(12)$, $XX(12)$, $YY(12)$ は 12 個を 1 行に打つために設けられている。

$SSXX=0.0 \dots SY=0.0$ は和を作る準備。

(3) 表題の印刷

```

PRINT 610
610 FORMAT(1H1,20X,17H HEIHŌWA TŌ SEKIWA)
PRINT 611
611 FORMAT(1H0,4H DATA)

```

これによって

```

HEIHŌWA TŌ SEKIWA
DATA

```

の形で印刷される。

(4) データの読みとり

```

READ 520 (X(J), Y(J) J=1,N)
520 FORMAT (6F12.0)

```

カードの入り方

1~12	13~24	25~36	37~48	49~60	61~72	
x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	
x_4	y_4	x_5	y_5	x_6	y_6	
x_7	y_7	x_8	y_8	x_9	y_9	

(5) データの印刷の準備

```

N2=(N+11)/12
N1=N
DŌ 20 J=1,N2
IF(N1-12) 110,120,120
110 N3=N1
GŌ TŌ 310
120 N3=12
310 DŌ 30 K=1,N3
K1=K+(J-1)*12
NO(K)=K1
XX(K)=X(K1)
YY(K)=Y(K1)

```

30 CONTINUE

$(n+1)/12$ の整数部だけ全体を繰返すことにする。 n が1から12までは1回、13から24までは2回、25から36ならば3回である。 $N1$ は印刷し残りの個数である。 $N1$ が12個以下ならばそのまま、 $N1$ が12より大であれば12個を1行に印刷する。その $N3$ 個を準備しておく。

$K1$ の値は第1回目のときは1, 2, ..., 12, まで第2回目のときは13, 14, ..., 24 が印刷される。その値を $NO(K)$, $XX(K)$, $YY(K)$ として準備する。

(6) データの印刷

```
PRINT 620, (NO(K), K=1, N3)
620 FORMAT(1H, 5H NO, 12(I4, 2X))
PRINT 630, (XX(K), K=1, N3)
630 FORMAT(1H, 5H X, 12(F6.2))
PRINT 640, (YY(K), K=1, N3)
640 FORMAT(1H, 5H Y, 12(F6.2))
N1=N1-12
20 CONTINUE
```

これによって

NO	1	2		12
X	1.86	1.82		1.85
Y	91.40	91.60		87.00

が印刷される。 $N1=N1-12$ によって印刷し残された数が入る。これを(6)で準備した回数だけ繰返す。

(7) x_i, y_i の和と平均を作る。

```
D0 50 I=1, N
SX=SX+X(I)
SY=SY+Y(I)
50 CONTINUE
AN=N
XBAR=SX/AN
YBAR=SY/AN
```

これは前の問題と同一である。

(8) 平方和を作る。

```
D0 60 I=1, N
SSXX=SSXX+(X(I)-XBAR)**2
```

```

      SSYY=SSYY+(Y(I)-YBAR)**2
      SSXY=SSXY+(X(I)-XBAR)*(Y(I)-YBAR)
60  CONTINUE

```

これによって

$$SSXX = \sum (X(I) - \bar{x})^2$$

$$SSXY = \sum (X(I) - \bar{x}) \cdot (Y(I) - \bar{y})$$

$$SSYY = \sum (Y(I) - \bar{y})^2$$

が入ることになる。

(9)

```

      PRINT 651
651  FORMAT (1H0,5HKEKKA)
      PRINT 652, N
652  FORMAT (1H ,7H N      =,I6)
      PRINT 653, XBAR
653  FORMAT (1H ,7H XBAR =,F12.5)
      PRINT 654, YBAR
654  FORMAT (1H ,7H YBAR =,F12.5)
      PRINT 655, SSXX
      PRINT 656, SSXY
656  FORMAT (1H ,7H SSXY =,F12.5)
      PRINT 657, SSYY
657  FORMAT (1H ,7H SSYY =,F12.5)
      CALL EXIT
      END

```

以上によってN, XBAR, YBAR, SSXX, SSXY, SSYY が印刷される。その形式は結果に示されているように次のようになる。

以上で

```

      KEKKA
      N =      30
      XBAR=    1.88933
      YBAR=    88.79666
      SSXX=     .03658
      SSXY=    - .76806
      SSYY=    98.30965

```

が印刷される。

問 3. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を与えて

$$y = a + bx$$

なる直線の推定を行なう。問題は第 2 章回帰分析の所の一次式を用いる。

no	1	2	3	4	5
x	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0
y	2.7	3.5	5.0	9.8	8.2

記号内容一覧表

X(I)	x_i
Y(I)	y_i
SX(1)	$\sum x_i$
SX(2)	$\sum y_i$
MX(1)	$\bar{x}$
MX(2)	$\bar{y}$
SSXX	$S(x, x) = \sum (x_i - \bar{x})^2$
SSXY	$S(x, y) = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
SSYY	$S(y, y) = \sum (y_i - \bar{y})^2$
SSR	$S_R = S(x, y)^2 / S(x, x)$
SSYX	$S_{y \cdot x} = S(y, y) - S_R$
NDFT	$\phi = n - 1$
DFT	(実数形)
NDFR	$\phi_{y, x} = n - 2$
DFR	(実数形)
RES(I)	$e_i = y_i - \bar{y} - b(x_i - \bar{x})$
SSE	$S_e = \sum e_i^2$
B	$b = S(x, y) / S(x, x)$
A	$a = \bar{y} - b\bar{x}$
VYX	$V_{y, x} = S_{y, x} / \phi_{y, x}$
SIGMA	$\hat{\sigma} = \sqrt{V_{y, x}}$
YEST	$yest = a + bx$
SIG	$C(x) = 1/n + (x - \bar{x})^2 / S(x, x)$
SIGQ	$\sqrt{C(x)}$
SIGL	$l(x) = \sqrt{C(x)} \cdot \hat{\sigma} \cdot t(\phi_e, 0.05)$
T	$t(\phi_e, 0.05)$
SLU	$yest + l(x)$
SLL	$yest - l(x)$

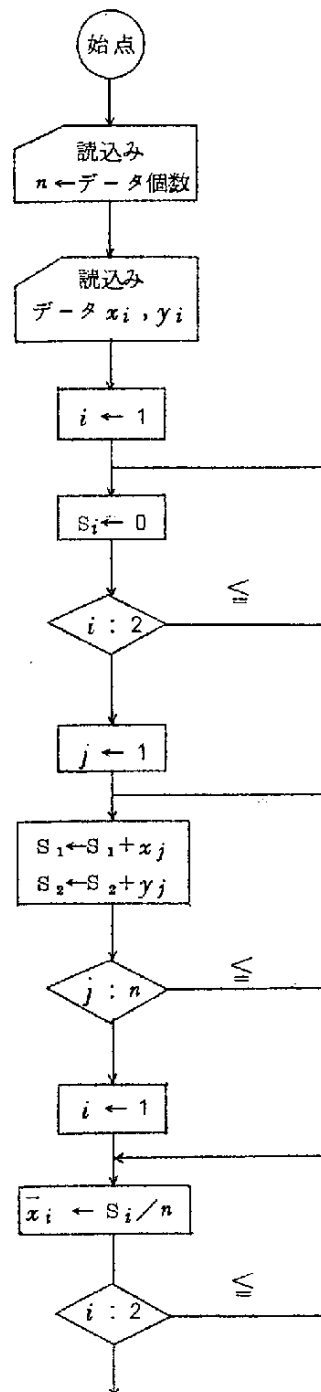
手順 1.

手順 2.

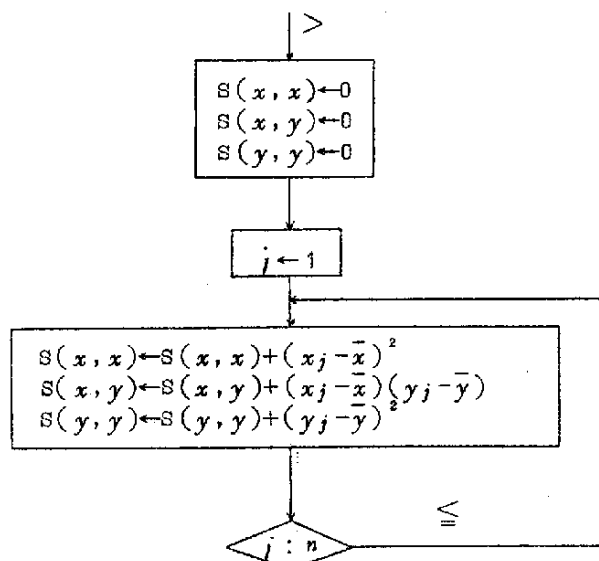
手順 3. 和の準備

手順 4. 和を作る

手順 5. 平均を作る



手順 6. 平方和を作る



手順 7. S_R を求める

$$S_R \leftarrow S(x, y)^2 / S(x, x)$$

手順 8. $S_{y \cdot x}$ を求める

$$S_{y \cdot x} \leftarrow S(y, y) - S_R$$

手順 9. 自由度を求める。

$$\begin{aligned} \phi &\leftarrow n - 1 \\ \phi_{y \cdot x} &\leftarrow n - 2 \end{aligned}$$

手順 10. 回帰係数 b
常数 a を求める

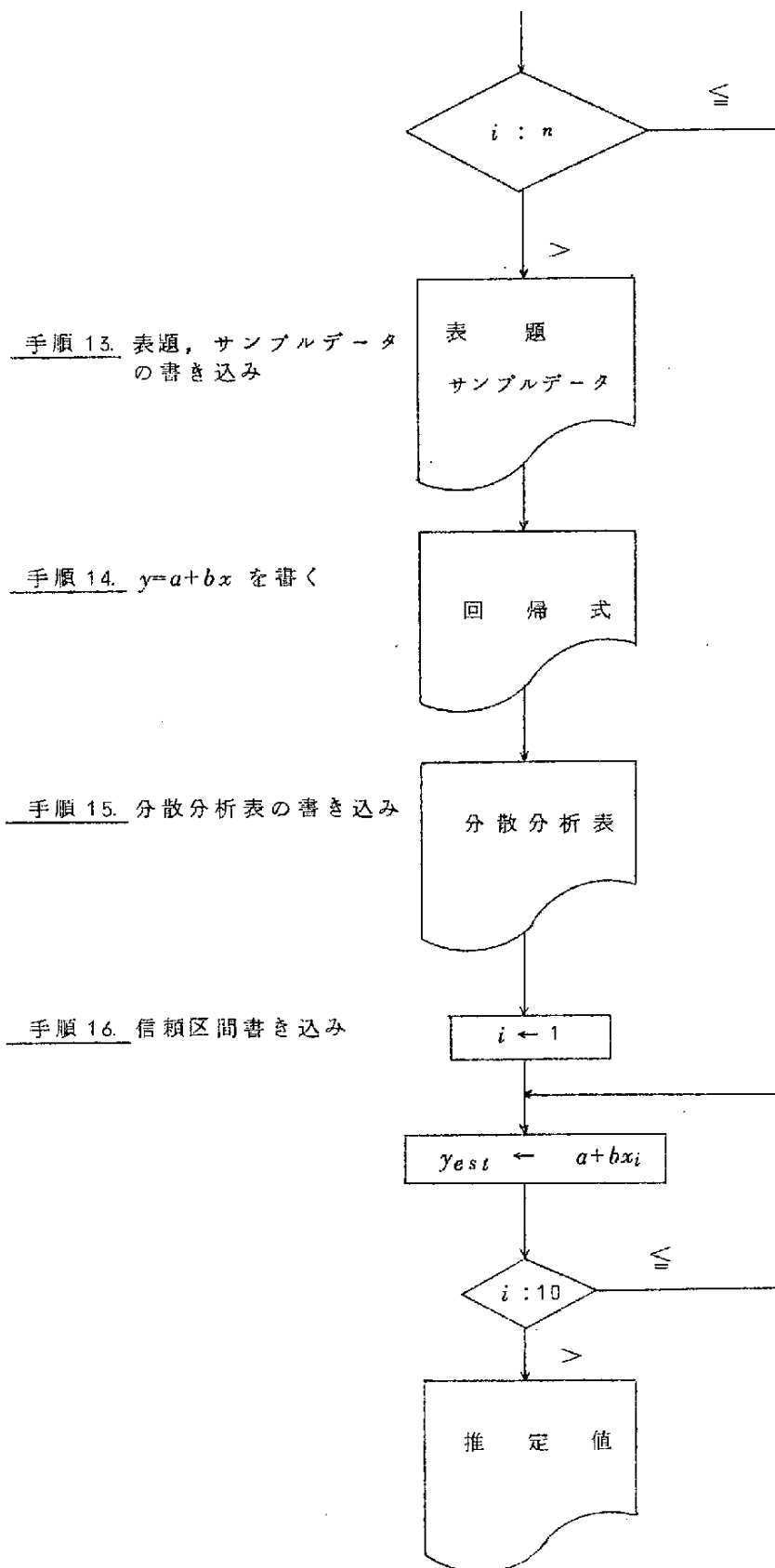
$$\begin{aligned} b &\leftarrow S(x, y) / S(x, x) \\ a &\leftarrow \bar{y} - b\bar{x} \end{aligned}$$

手順 11. 不偏分散を求める

$$V_{y \cdot x} \leftarrow S_{y \cdot x} / \phi_{y \cdot x}$$

手順 12. 残査, 残差平方和
を求める

$$\begin{aligned} e_i &\leftarrow y_i - a - bx_i \\ S_E &\leftarrow S_E + e_i^2 \end{aligned}$$



```

C      1-JI NO TAKO-SHIKI
C      DATA NO KAZU WA N-KO
      DIMENSION X(100),Y(100),SX(2),RES(100),XM(10)
C      TEJUN 1      YOMIKOMI
      READ 100,N
100    FORMAT(I3)
C      TEJUN 2      DATA NO YOMIKOMI
      READ 101,(X(I),Y(I),I=1,N)
101    FORMAT(12X,2F12.0)
C      TEJUN 3      DATA NO WA NO JUNBI
      DO 10 I=1,2
      SX(I)=0.0
10    CONTINUE
C      TEJUN 4      DATA NO WA NO KEISAN
      DO 20 I=1,N
      SX(1)=SX(1)+X(I)
      SX(2)=SX(2)+Y(I)
20    CONTINUE
C      TEJUN 5      HEIKIN
      AN=N
      DO 30 I=1,2
      XM(I)=SX(I)/AN
30    CONTINUE
C      TEJUN 6      HEIHOWA
      SSXX=0.0
      SSXY=0.0
      SSYY=0.0
      DO 50 J=1,N
      X1=X(J)-XM(1)
      X2=Y(J)-XM(2)
      SSXX=SSXX+X1**2
      SSXY=SSXY+X1*X2
      SSYY=SSYY+X2**2
50    CONTINUE
C      TEJUN 7      KAIKI NO HEIHOWA
      SSR=SSXY**2/SSXX
C      TEJUN 8      HEIHOWA ZANSABUN

```



```

      SSYX=SSYY-SSR
C      TEJUN 9      JIYU-DO
      NDFT=N-1
      NDFR=N-2
      DFR=NDFR
C      TEJUN 10     KAIKI-KEISU
      B=SSXY/SSXX
      A=XM(2)-B*XM(1)
C      TEJUN 11     HUHENBUNSAN
      VYX=SSYX/DFR
      FO=SSR/VYX
      SIGMA=SQRT(VYX)
C      TEJUN 12     ZANSA
      SSE=0.0
      DO 60 I=1,N
      RES(I)=Y(I)-A-B*X(I)
      SSE=SSE+RES(I)**2
60    CONTINUE
C      TEJUN 13     KAKIKOMI
      PRINT 200
200   FORMAT(1H1,6X,19HREGRESSION ANALYSIS//)
      PRINT 201
201   FORMAT(7X,11HSAMPLE DATA)
      PRINT 202, (I,I=1,N), (X(I),I=1,N), (Y(I),
1 I=1,N), (RES(I),I=1,N)
202   FORMAT(3HONO,5I8/5H X ,5F8.2/4H Y ,
15F8.2/5H RES , 5F8.2)
C      TEJUN 14     KAIKI-SHIKI
      PRINT 203,A,B
203   FORMAT(///4H Y =,E16.7,3H +,E16.7,2H X///)
C      TEJUN 15     BUNSAN BUNSEKI HYO
      PRINT 204,SSR,SSR,FO,SSYX,NDFR,VYX,SSYY,NDFT
204   FORMAT(11X,30H TABLE OF ANALYSIS OF
1 VARIANCE//6H VAR,12X,2HSS,9X,2HDF,7X,2HMS,
214X,2HFC/11H REGRESSION,E16.7,4H 1,2E16.7/
39H RESIDUAL,2X,E16.7,14,E16.7/6H TOTAL,5X,
E16.7,14///)

```

```

C      TEJUN 16  SHINRAI KUKAN
      PRINT 220
220  FORMAT(11X,18HSIGNIFICANCE RANGE//1H ,18X,
14HLINE,13X,5HPOINT/2X,1HX,3X,4HYEST,5X,
25HUPPER,2X,5HLOWER,5X,5HUPPER,2X,5HLOWER/)
      T=3.182
      DO 70 I=1,10
      XX=I
      YEST=A+B*XX
      SPU=YEST+T*SIGMA
      SPL=YEST-T*SIGMA
      SIG=1.0/AN+(XX-XM(1))*2/SSXX
      SIGO=SQRT(SIG)
      SIGL=SIGO*SIGMA*T
      SLU=YEST+SIGL
      SLL=YEST-SIGL
      PRINT 230,I,YEST,SLU,SLL,SPU,SPL
230  FORMAT(1H ,I2,F7.2,3X,2F7.2,3X,2F7.2/)
      70 CONTINUE
      PRINT 240,SSE,SSYX,SIGMA
240  FORMAT(1H0,7HSS RES=,E16.7/1H ,7HSSYX= ,
1E16.7/1H ,7HSIGMA= ,1E16.7)
      CALL EXIT
      END

```

REGRESSION ANALYSIS

SAMPLE DATA

NO	1	2	3	4	5
X	1.00	2.00	3.00	4.00	5.00
Y	2.70	3.50	5.00	9.80	8.20
RES	.32	-.61	-.84	2.23	-1.10

$$Y = 6.50000000E-01 + 1.73000000E+00 X$$

TABLE OF ANALYSIS OF VARIANCE

VAR	SS	DF	MS	FO
REGRESSION	2.9929000E+01	1	2.9929000E+01	1.2194350E+01
RESIDUAL	7.3630000E+00	3	2.4543333E+00	
TOTAL	3.7292000E+01	4		

SIGNIFICANCE RANGE

X	YEST	LINE		POINT	
		UPPER	LOWER	UPPER	LOWER
1	2.38	6.24	-1.48	7.36	-2.60
2	4.11	6.84	1.37	9.09	-0.87
3	5.84	8.06	3.61	10.82	0.85
4	7.57	10.30	4.83	12.55	2.58
5	9.30	13.16	5.43	14.28	4.31
6	11.03	16.25	5.80	16.01	6.04
7	12.76	19.44	6.07	17.74	7.77
8	14.49	22.68	6.29	19.47	9.50
9	16.22	20.93	6.50	21.20	11.23
10	17.95	29.20	6.69	22.93	12.96

SS RES = 7.3630000E+00

SSYX = 7.3630000E+00

SIGMA = 1.5666311E+00

(1) 表題の指示

```

C      1-JI NO TAKO-SHIKI
C      DATA NO KAZU WA N-KO
      DIMENSION X(100),Y(100),SX(2),RES(100),
      1 XM(10)

```

(2) 手順1 データ個数の読み込み

```

C      TEJUN 1 YOMIKOMI
      READ 100,N
      100 FORMAT(13)

```

(3) 手順2. データの読み込み

```
C      TEJUN 2  DATA NO YOMIKOMI
      READ 101, (X(I), Y(I), I=1, N)
101  FORMAT(12X, 2F12.0)
```

データを読み込む。 (x_i, y_i) を同じカードに組にして入れておく。データ個数があまり大きくない限りは同時に読込んでしまうことにする。そのためには x_i を $X(I)$ で、 y_i を $Y(I)$ でとっておく。データ数 n はデメンションより小さいことが必要である。

```
|| DIMENSION X(100), Y(100)
```

上の形でとっておけば n が 100 までのものは処理することができる。

(4) 手順3. データの和の準備

```
C      TEJUN 3  DATA NO WA NO JUNBI
      DO 10 I=1, 2
      SX(I)=0.0
10  CONTINUE
```

$\sum y_i$ と $\sum x_i$ を作る。 $S(1) = \sum x_i$, $S(2) = \sum y_i$ として、 x と y とを同格にし、ただ記号 1, 2 を用いて区別をしておく。これはもっと一般の形を扱うとき便利である。

和を作るときは分散分析の所ですでに知っているように $D0$ を用いて行なう。 $S(1)$, $S(2)$ などは始め 0 を入れておく。

(5) 手順4. データの和の計算

```
C      TEJUN 4  DATA NO WA NO KEISAN
      DO 20 I=1, N
      SX(1)=SX(1)+X(I)
      SX(2)=SX(2)+Y(I)
20  CONTINUE
```

ついで和 $\sum x_i$, $\sum y_i$ を求める。

$I = 1$

$SX(1) = 0.0$ が入っている。これに $X(1)$ を加えるとこれが新しい $SX(1)$ となる。

$SX(1) = X(1) = x_1$

同様に

$SX(2) = Y(1) = y_1$

$I = 2$

$SX(1) = x_1$, $SX(2) = y_1$ が入っている。これに $X(2)$, $Y(2)$ が加わるので、

$SX(1) = x_1 + x_2$, $SX(2) = y_1 + y_2$ となる。

I = 3

上と同様にして

$$SX(1) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$SX(2) = y_1 + y_2 + y_3$$

となる。

(6) 手順5. 平均を作る。

```
C      TEJUN 5   HEIKIN
      AN=N
      DO 30 I=1,2
      XM(I)=SX(I)/AN
30    CONTINUE
       $\bar{x} = \sum x / n$ 
       $\bar{y} = \sum y / n$ 
```

(7) 手順6. 平方和の計算

```
C      TEJUN 6   HEIHOWA
      SSXX=0.0
      SSXY=0.0
      SSYY=0.0
      DO 50 J=1,N
      X1=X(J)-XM(1)
      X2=Y(J)-XM(2)
      SSXX=SSXX+X1**2
      SSXY=SSXY+X1*X2
      SSYY=SSYY+X2**2
50    CONTINUE
```

$S(x, x), S(x, y), S(y, y)$ を求める。ただし, $S(x, x) = \sum (x_i - \bar{x})^2$,
 $S(x, y) = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, $S(y, y) = \sum (y_i - \bar{y})^2$

これらの具体的な計算方法はすでに示した平方和の計算と同様である。

(8) 手順7. S_R を求める。

```
C      TEJUN 7   KAIKI NO HEIHOWA
      SSR=SSXY**2/SSXX
       $S_R = S(x, y)^2 / S(x, x)$       回帰分の平方和
```

(9) 手順 8. $s_{y,x}$ を求める。

```
C      TEJUN  8    HEIHOWA ZANSABUN
      SSYX=SSYY-SSR
       $s_{y,x} = S(y,y) - S_R$           残差分の平方和
```

(10) 手順 9 自由度を求める。

```
C      TEJUN  9    JIYU-DO
      NDFT=N-1
      NDFR=N-2
      DFR=NDFR
       $\phi_T = n - 1$           総変動の自由度
       $\phi_{y,x} = n - 2$       残差項の自由度
```

(11) 手順 10. 係数を求める。

```
C      TEJUN  10   KAIKI-KEISU
      B=SSXY/SSXX
      A=XM(2)-B*XM(1)
       $b = S(x,y) / S(x,x)$ 
       $a = \bar{y} - b \cdot \bar{x}$ 
```

(12) 手順 11. 不偏推定を求める。

```
C      TEJUN  11   HUHNBUNSAN
      VYX=SSYX/DFR
      FO=SSR/VYX
      SIGMA=SQRT(VYX)
       $V_{y,x} = S_{y,x} / \phi_{y,x}$ 
       $F = V_R / V_{y,x}$ 
       $\hat{\sigma} = \sqrt{V_{y,x}}$ 
```

(13) 手順 12. 残差平方和の計算

```
C      TEJUN  12   ZANSA
      SSE=0.0
      DO 60 I=1,N
      RES(I)=Y(I)-A-B*X(I)
      SSE=SSE+RES(I)**2
60 CONTINUE
       $e_i = y_i - (\bar{y} + b(x_i - \bar{x}))$ 
```

$$= y_i - (a + b x_i)$$

$$S_e = \sum e_i^2$$

この値は実は $S_{y,x}$ に等しい。

(14) 手順 13. 表題, データ, 残差の書き込み

```

C      TEJUN 13  KAKIKOMI
      PRINT 200

200  FORMAT(1H1,6X,19HREGRESSION ANALYSIS//)
      PRINT 201

201  FORMAT(7X,11HSAMPLE DATA)
      PRINT 202, (I, I=1, N), (X(I), I=1, N), (Y(I),
1 I=1, N), (RES(I), I=1, N)

202  FORMAT(3HONO,10I8/5H X ,10F8.2/4H Y ,
1 10F8.2/5H RES ,10F8.2)

```

(15) 手順 14. 推定式の書き込み

```

C      TEJUN 14  KAIKI-SHIKI
      PRINT 203, A, B

203  FORMAT(///4H Y =,E16.7,3H +,E16.7,2H X///)
      y=a+bx を書く。

```

(16) 手順 15. 分散分析表

```

      TEJUN 15  BUNSAN BUNSEKI HYO
      PRINT 204, SSR, SSR, FO, SSYX, NDFR, VYX, SSYY, NDFR

204  FORMAT(11X,30H TABLE OF ANALYSIS OF
1 VARIANCE//6H VAR,12X,2HSS,9X,2HDF,7X,2HMS,
2 14X,2HFC/11H REGRESSION,E16.7,4H 1,2E16.7/
3 9H RESIDUAL,2X,E16.7,14,E16.7/6H TOTAL,5X,
4 E16.7;14///)

```

(17) 手順 16. 推定値, 信頼区間の計算, 書き込み

```

C      TEJUN 16  SHINRAI KUKAN
      PRINT 220

220  FORMAT(11X,18HSIGNIFICANCE RANGE//1H ,18X,
1 14HLINE.13X,5HPOINT/2X,1HX,3X,4HYEST,5X,
2 5HUPPER,2X,5HLOWER,5X;5HUPPER,2X,5HLOWER/)
      T=2.045

```

```

DO 70 I=1,10
XX=I
YEST=A+B*XX
SPU=YEST+T*SIGMA
SPL=YEST-T*SIGMA
SIG=1.0/AN+(XX-XM(1))**2/SSXX
SIGQ=SQRT(SIG)
SIGL=SIGQ*SIGMA*T
SLU=YEST+SIGL
SLL=YEST-SIGL
PRINT 230,I,YEST,SLU,SLL,SPU,SPL
230 FORMAT(1H ,I2,F7.2,3X,2F7.2,3X,2F7.2/)
70 CONTINUE
PRINT 240,SSE,SSYX,SIGMA
240 FORMAT(1H0,7HSS RES=,E16.7/1H ,7HSSYX= ,
1E16.7/1H,7HSIGMA= ,1E16.7)
CALL EXIT
END

```

信頼区間を求める。グラフ用のデータを計算する。

x の 1, 2, …… , 10 までの値に対して y を計算する。

$$y_{est} = \bar{y} + b(x - \bar{x})$$

信頼区間は, LINE とある方は

$$y_{est} \pm t(\phi_{y \cdot x}, 0.05) \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{S(x, x)}\right) V_{y \cdot x}}$$

であり, PI0NTとある方が

$$y_{est} \pm t(\phi_{y \cdot x}, 0.05) \cdot \sqrt{V_{y \cdot x}}$$

である。これを用いてグラフを描くことができる。

問4. 重回帰の計算

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4$$

の形で a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 を求める。ここで行列による連立一次方程式のとき方も示す。

```

C      MULTIPLE REGRESSION
C      N-VARIATES , NUMBER OF DATA IS M
      DIMENSION X( 50, 21), A( 21, 41), O( 20), S( 20),
1 F( 20), B( 20)

```



```

C      YOMIKOMI
      READ 500,N,M,F1
500   FORMAT(2I3,F6.0)
      N1=N+2
      READ 501,((X(I,J),J=2,N1),I=1,M)
501   FORMAT(5F6.0)
C      KAKIKOMI(DATA)
      PRINT 600
600   FORMAT(1H1,20X,19H MULTIPLE REGRESSION///1H ,
      120X,11H SAMPLE DATA//) PRINT 600,(J,J=1,N)
601   FORMAT(1H ,5X,2HNO,9X,4(1HX,I2,7X),1HY)
      DO 100 I=1,M
      PRINT 602,I,(X(I,J),J=2,N1)
602   FORMAT(1H ,4X,I3,3X,4F10.0,F10.1)
      X(I,1)=1.0
100   CONTINUE
      N2=2*N+3
C      A(I,J) NO KEISAN NO JUNBI
      DO 101 I=1,N1
      DO 102 J=1,N2
      A(I,J)0.0
102   CONTINUE
      I1=I+N1
      A(I,I1)=1.0
101   CONTINUE
C      A(I,J) NO KEISAN TO INSATSU
      PRINT 604
604   FORMAT(1H1,15X,15H TABLE OF A(I,J))
      PRINT 605
605   FORMAT(1H0,8X,1HC,9X,2HA1,8X,2HA2,8X,2HA3,
      18X,2HA4,8X,1HB,9X2HCO,8X,2HC1,8X,2HC2,8X,
      22HCO,8X,2HC4)
      DO 103 I=1,N1
      DO 104 J=1,N1
      DO 105 K=1,M
      A(I,J)=A(I,J)+X(K,I)*X(K,J)
105   CONTINUE

```

```

      A(J,I)=A(I,J)
104  CONTINUE
      PRINT 603,(A(I,J),J=1,N2)
603  FORMAT(1H ,11F10.1)
      B(I)=A(I,N1)
103  CONTINUE
C    GYORETSU NO KEISAN TO INSATSU
      NN=N+1
      DO 106 K=1,NN
        K1=K+1
        DO 107 J=K1,N2
          A(K,J)=A(K,J)/A(K,K)
        DO 108 I=1,N1
          IF(I-K)300,108,300
300  CONTINUE
          A(I,J)=A(I,J)-A(I,K)*A(K,J)
108  CONTINUE
107  CONTINUE
        DO 111 I=1,N1
          IF(I-K)301,302,301
302  A(K,K)=1.0
          GO TO 111
301  A(I,K)=0.0
111  CONTINUE
      PRINT 605
      DO 109 I=1,N1
        PRINT 606,(A(I,J),J=1,N2)
606  FORMAT(4X,11F10.4)
109  CONTINUE
106  CONTINUE
C    KKKKA NO INSATSU
      SS=A(N1,N1)
      DFE=M-N-1
      NDFE=DFE
      SM=A(N1,N1)/DFE
      SD=SQRT(SM)
      PRINT 607,SS,SM,SD,NDFE,F1

```

```

607  FORMAT(1H1,15X,4HS.S.,6X,4HM.S.,6X,4HS.D.,
      16HD.F.,6X,6HF(1,8)/6X,5HEERROR,3F.10.4.17,
      2F13.2////)
      DO 110 I=1,NN
      NN1=1+NN
      C(I)=A(I,NN1)
      S(I)=SQRT(C(I)*SM)
      F(I)=B(I)*A(I,NN1)/SM/C(I)
110  CONTINUE
      PRINT 608
608  FORMAT(1H ,20X,1HC,10X,2HX1,8X,2HX2,8X,
      12HX3,8X,2HX4,8X)
609  FORMAT(1H0,5X,5HKEISU,5X,5F10.6)
      PRINT 610,(S(I),I=1,NN)
610  FORMAT(1H0,5X,4HS.D.,6X,5F10.6)
      PRINT 611,(C(I),I=1,NN)
611  FORMAT(1H0,5X,6HC(I,I),4X,F14.6,4F10.6)
      PRINT 613,(F(I),I=1,NN)
613  FORMAT(1H0,5X,2HFO,8X,5F10.3)
      CALL EXIT
      END

```

MULTIPLE REGRESSION
SAMPLE DATA

NO	X1	X2	X3	X4	Y
1	7.	26.	6.	60.	78.5
2	1.	29.	15.	52.	74.3
3	11.	56.	8.	20.	104.3
4	11.	31.	8.	47.	87.6
5	7.	52.	6.	33.	95.9
6	11.	55.	9.	22.	109.2
7	3.	71.	17.	6.	102.7
8	1.	31.	22.	44.	72.5
9	2.	54.	18.	22.	93.1
10	21.	47.	4.	26.	115.9
11	1.	40.	23.	34.	83.8
12	11.	66.	9.	12.	113.3
13	10.	68.	8.	12.	109.4

TABLE OF(I, J)

C	A 1	A 2	A 3	A 4	B
13.0	97.0	626.0	153.0	390.0	1240.5
97.0	1139.0	4922.0	769.0	2620.0	10032.0
626.0	4922.0	33050.0	7201.0	15739.0	62027.8
153.0	769.0	7201.0	2293.0	4628.0	13981.5
390.0	2620.0	15739.0	4628.0	15062.0	34733.3
1240.5	10032.0	62027.8	13981.5	34733.3	121088.0

C	A 1	A 2	A 3	A 4	B
1.0000	7.4615	48.1538	11.7692	30.0000	95.4230
0.0000	415.2308	251.0770	-372.6153	-290.0000	775.9620
0.0000	251.0770	2905.6930	-166.5379	-3041.0000	2292.9550
0.0000	-372.6153	-166.5384	492.3079	38.0000	-618.2300
0.0000	-289.9999	-3040.9990	38.0003	3362.0000	-2481.6990
0.0000	775.9620	2292.9550	-618.2290	-2481.7000	2715.7700

C	A 1	A 2	A 3	A 4	B
1.0000	0.0000	43.6420	18.4649	35.2111	81.4793
0.0000	1.0000	.6046	-8.973	-6.984	1.8687
0.0000	0.0000	2753.8747	58.7708	-2865.6462	1823.7553
0.0000	0.0000	58.7703	157.9344	-222.2370	78.0943
0.0000	0.0000	-2865.6452	-222.2366	3159.4622	-1939.7621
0.0000	0.0000	1823.7552	78.0953	-1939.7629	1265.6921

C 0	C 1	C 2	C 0	C 4
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
0.0	0.0	1.0	0.0	0.0
0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
0.0	0.0	0.0	0.0	1.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

C 0	C 1	C 2	C 0	C 4
.0769	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-7.4615	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-48.1538	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
-11.7692	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000
-29.9999	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000
-95.4230	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

C 0	C 1	C 2	C 0	C 4
.2110	-.0179	0.0000	0.0000	0.0000
-.0179	.0024	0.0000	0.0000	0.0000
-43.6420	-.6046	1.0000	0.0000	0.0000
-18.4649	.8973	0.0000	1.0000	0.0000
-35.2111	.6984	0.0000	0.0000	1.0000
-81.4793	-1.8687	0.0000	0.0000	0.0000

C	A 1	A 2	A 3	A 4	B
1.0000	0.0000	0.0000	17.5336	80.6245	52.5773
0.0000	1.0000	0.0000	-9.102	-0.691	1.4683
0.0000	0.0000	1.0000	.0213	-1.0405	.6622
0.0000	0.0000	0.0000	156.6802	-161.0814	39.1736
0.0000	0.0000	0.0000	-161.0805	177.5094	-41.9868
0.0000	0.0000	0.0000	39.1743	-41.9872	57.9091
C	A 1	A 2	A 3	A 4	B
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	98.6507	48.1935
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	-1.0050	1.6958
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-1.0186	.6569
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	-1.0280	.2500
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	11.9041	-1.7130
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-1.7124	48.1146
C	A 1	A 2	A 3	A 4	B
1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	62.3893
0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.5512
0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000	.5103
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	.1020
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	-.1439
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	47.8682

C 0	C 1	C 2	C 0	C 4
.9026	-.0083	-.0158	0.0000	0.0000
-.0083	.0025	-.0002	0.0000	0.0000
-.0158	-.0002	.0003	0.0000	0.0000
-17.5336	.9102	-.0213	1.0000	0.0000
-80.6245	.0691	1.0405	0.0000	1.0000
-52.5773	-1.4683	-.6622	0.0000	0.0000
C 0	C 1	C 2	C 0	C 4
2.8647	-.1102	-.0134	-.1119	0.0000
-.1102	.0078	-.0003	.0058	0.0000
-.0134	-.0003	.0003	-.0001	0.0000
-.1119	.0058	-.0001	.0063	0.0000
-98.6505	1.0050	1.0186	1.0280	1.0000
-48.1934	-1.6958	-.6569	-.2500	0.0000
C 0	C 1	C 2	C 0	C 4
820.3934	-8.4390	-8.4550	-8.6317	-8.2871
-8.4391	.0926	.0856	.0926	.0844
-8.4550	.0856	.0875	.0878	.0855
-8.6317	.0926	.0878	.0951	.0863
-8.2871	.0844	.0855	.0863	.0840
-62.3849	-1.5513	-.5103	-.1021	.1438

	S . S .	M . S .	S . D .	D . F .	F (1 , 8)
ERROR	47.8682	5.9835	2.4461	8	5.32

	C	X 1	X 2	X 3	X 4
KEISU	62389391	1.551270	.510331	.102080	-.143900
S . D .	70.063150	.744693	.723708	.754629	.708973
C (I , I)	820393420	.092682	.087532	.095172	.084004
FO	15.766	28062.078	60438.235	2506.274	-9943682

問 5. 直交多項式

直交多項式を前の線形回帰のとき方のところに代入してとくとA表が対角行列になることを示している。

```

C      ORTHOGONAL POLINOMIAL
C      N-VARIATES , NUMBER OF DATA IS M
      DIMENSION X( 50,21),A( 21,41),O( 20),S( 20)
C      YOMIKOMI
      READ 500,N,M
500    FORMAT(2I3)
      N1=N+2
      READ 501,((X(I,J),J=2,N1),I=1,M)
501    FORMAT(5F6.0)
C      KAKIKOMI(DATA)
      PRINT 600
600    FORMAT(1H1,20X,21HORTHOGONAL POLINOMIAL///
11H ,20X,11HSAMPLE DATA)
      PRINT 601,(J,J=1,N)
601    FORMAT(1H ,5X,2HNO,9X,4(1HX,I2,7X),1HY)
      DO 100 I=1,M
      PRINT 602,I,(X(I,J),J=2,N1)
602    FORMAT(1H0,4X,I3,3X,4F10.0,F10.1)
      X(I,1)=1.0
100    CONTINUE
      N2=2*N+3

```



```

C      A(I,J) NO KEISAN NO JUNBI
      DO 101 I=1,N1
      DO 102 J=1,N2
      A(I,J)=0.0
102   CONTINUE
      I1=I+N1
      A(I,I1)=1.0
101   CONTINUE
C      A(I,J) NO KEISAN TO INSATSU
      PRINT 604
604   FORMAT(1H1,15X,15HTABLE OF A(I,J))
      PRINT 605
605   FORMAT(1H0,8X,1HC,9X,2HA1,8X,2HA2,8X,2HA3,
18X,2HA4,8X,1HB,9X,2HCO,8X,2HC1,8X,2HC2,8X,
22HCO,8X,2HC4)
      DO 103 I=1,N1
      DO 104 J=I,N1
      DO 105 K=1,M
      A(I,J)=A(I,J)+X(K,I)*X(K,J)
105   CONTINUE
      A(J,I)=A(I,J)
104   CONTINUE
      PRINT 603,(A(I,J),J=1,N2)
603   FORMAT(1H ,11F10.1)
103   CONTINUE
      CALL EXIT
      END

```

ORTHOGONAL POLINOMIAL
SAMPLE DATA

NO	X1	X2	X3	X4	Y
1	-2.	2.	-1.	1.	4.8
2	-1.	-1.	2.	-4.	3.0
3	0.	-2.	0.	6.	6.2
4	1.	-1.	-2.	-4.	9.4
5	2.	2.	1.	1.	21.6

TABLE OF A(I, J)

C	A 1	A 2	A 3	A 4	B
5.0	0.0	0.0	0.0	0.0	45.0
0.0	10.0	0.0	0.0	0.0	40.0
0.0	0.0	14.0	0.0	0.0	28.0
0.0	0.0	0.0	10.0	0.0	4.0
0.0	0.0	0.0	0.0	70.0	14.0
45.0	40.0	28.0	4.0	14.0	625.4

C 0	C 1	C 2	C 0	C 4
1. 0	0. 0	0. 0	0. 0	0. 0
0. 0	1. 0	0. 0	0. 0	0. 0
0. 0	0. 0	1. 0	0. 0	0. 0
0. 0	0. 0	0. 0	1. 0	0. 0
0. 0	0. 0	0. 0	0. 0	1. 0
0. 0	0. 0	0. 0	0. 0	0. 1

問 6. 分散分析

2 元配置繰返しなしについてとく。本文中の問題をといているので比較されたい。

因子は A, B, 各水準は m, n, すなわちデータは下の形で与えられている。

	B ₁	B ₂	...	B _n	計
A ₁	x ₁₁	x ₁₂	...	x _{1n}	X _{1.}
A ₂	x ₂₁	x ₂₂	...	x _{2n}	X _{2.}
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A _m	x _{m1}	x _{m2}	...	x _{mn}	X _{m.}
計	X _{.1}	X _{.2}	...	X _{.n}	X _{..}

ただし

$$X_i = \sum_j x_{ij}$$

$$X_{\cdot j} = \sum_i x_{ij}$$

$$X_{..} = \sum_i \sum_j x_{ij}$$

構造式は

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ij} \\ (i = 1 \cdots m, j = 1 \cdots n)$$

とする。

μ : 総平均

α_i : 水準 A_i の主効果

β_j : 水準 B_j の主効果

e_{ij} : 誤差 NID(0, σ^2)

分散分析表として平方和を求める。

$$S_A = \sum_i X_i^2 / n - CT$$

$$S_B = \sum_j X_j^2 / m - CT$$

$$S_T = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CT$$

$$CT = X_{..}^2 / m \cdot n$$

主効果の推定値

$$\hat{\mu} = X_{..} / m \cdot n$$

$$\hat{\alpha}_i = X_{i.} / n - \hat{\mu}$$

$$\hat{\beta}_j = X_{.j} / m - \hat{\mu}$$

自 由 度

$$\phi_A = m - 1$$

$$\phi_B = n - 1$$

$$\phi_E = (m - 1)(n - 1)$$

$$\phi_T = mn - 1$$

分 散 分 析 表

要 因	平 方 和	自 由 度	不 偏 分 散	分 散 比
A	S _A	ϕ_A	$V_A = S_A / \phi_A$	$F_A = V_A / V_E$
B	S _B	ϕ_B	$V_B = S_B / \phi_B$	$F_B = V_B / V_E$
E	S _E	ϕ_E	$V_E = S_E / \phi_E$	
T	S _T	ϕ_T		

記 号

x_{ij} : X(I, J)

$X_{i.}$: SXN(I)

$X_{.j}$: SXM(J)

$X_{..}$: SX

$\sum \sum x_{ij}^2$: SSX

$\sum X_i^2$: SSXN

$\sum X_{.j}^2$: SSXM

$\hat{\mu}$: HATM

$\hat{\alpha}_i$: AHAT(I)

$\hat{\beta}_j$: BHAT(J)

S_A : FACTA

S_B : FACTB

S_E : ERROR

S_T : TOTAL

V_A : AMS

V_B : BMS

VE : EMS
 ϕ_A : IFA
 ϕ_B : IFB
 ϕ_E : IFE
 ϕ_T : IFT

```

C      ANALYSIS OF VARIANCE ( TWO FACTORS)
      DIMENSION X(10,10),SXA(10),SXB(10),HATA(10),
1 HATB(10)

      READ 100,M,N,FA,FB
100  FORMAT(2I4,2F6.0)
C      YOMI KOMI
      READ 101,((X(I,J),J=1,N),I=1,M)
101  FORMAT(10F6.0)
C      JUNBI
      AM=M
      AN=N
      DO 10 I=1,M
10   SXA(I)=0.0
      DO 11 J=1,N
11   SXB(J)=0.0
      SSX=0.0
      SSA=0.0
      SSB=0.0
      SX=0.0
C      WA TO SEKIWA
      DO 21 I=1,M
      DO 20 J=1,N
      SXA(I)=SXA(I)+X(I,J)
20   SSX=SSX+X(I,J)*X(I,J)
      SX=SX+SXA(I)
21   SSA=SSA+SXA(I)*SXA(I)
      DO 23 J=1,N
      DO 22 I=1,M
22   SXB(J)=SXB(J)+X(I,J)
23   SSB=SSB+SXB(J)*SXB(J)
      HATM=SX/(AM*AN)
  
```

```

      DO 30 I=1,M
30    HATA(I)=SXA(I)/AN-HATM
      DO 31 J=1,N
31    HATB(J)=SXB(J)/AM-HATM
      CT= SX* SX/(AM*AN)
C    BUNSAN BUNSEKI HYO NO JUNBI
      TOTAL=SSX-CT
      FACTA=SSA/AN-CT
      FACTB=SSB/AM-CT
      ERROR=TOTAL-FACTA-FACTB
      FACTE=ERROR
      IFE=(M-1)*(N-1)
      IFT=M*N-1
      IFA=M-1
      IFB=N-1
      AMS=FACTA/(AM-1.0)
      BMS=FACTB/(AN-1.0)
      EMS=ERROR/((AM-1.0)*(AN-1.0))
      FOA=AMS/EMS
      FOB=BMS/EMS
C    INSATSU
      PRINT 200
200  FORMAT(1H1,20HANALYSIS OF VARIANCE///)
      PRINT 201,(J,J=1,N)
201  FORMAT(1H ,10X, 4(1HB,I2,6X),6HATOTAL/)
      PRINT 202,(I(X(I,J),J=1,N),SXA(I),I=1,M)
202  FORMAT(1H ,2X,1HA,I2, 5F9.1)
      PRINT 203,(SXB(J),J=1,N),SX
203  FORMAT(1H0,6HBTOTAL,F8.1,9F9.1)
      PRINT 204
204  FORMAT(1H ///10X,29HTABLE OF ANALYSIS OF
1 VARIANCE
      PRINT 205
205  FORMAT(1H0,5X,4HVAR.,9X,4HD.F.,4X,4HS.S.,
1 6X,4HM.S.,6X,2HFO,6X,1HF)
      PRINT 206,IFA,FACTA, AMS,FOA,FA
206  FORMAT(1H ,2X,8HFACTOR A,8X,I2,2F10.2,F10.4,
1 F7.2)

```

```

      PRINT 207, IFB, FACTB, BMS, FOB, FB
207  FORMAT(1H ,2X,8HFACTOR B,8X,I2,2F10.2,F10.4,
1F7.2)
      PRINT 208, IFF, FACTE, EMS
208  FORMAT(1H ,2X,5HERROR,11X,I2,2F10.2)
      PRINT 209, IFT, TOTAL
209  FORMAT(1H ,2X,5HTOTAL,11X,I2,F10.2///)
      PRINT 210, HATM
      PRINT 211, (HATA(I), I=1, M)
      TRINT 212, (HATB(J), J=1, N)
210  FORMAT(6H HAT M, F10.4)
211  FORMAT(6H HAT A, 10F10.4)
212  FORMAT(6H HAT B, 10F10.4)
      CALL EXIT
      END

```

ANALYSIS OF VARIANCE

	B 1	B 2	B 3	B 4	ATOTAL
A 1	22.6	23.4	23.6	23.2	92.8
A 2	22.7	23.4	23.7	23.0	92.8
A 3	21.9	22.8	22.9	22.8	90.4
BTOTAL	67.2	69.6	70.2	69.0	276.0

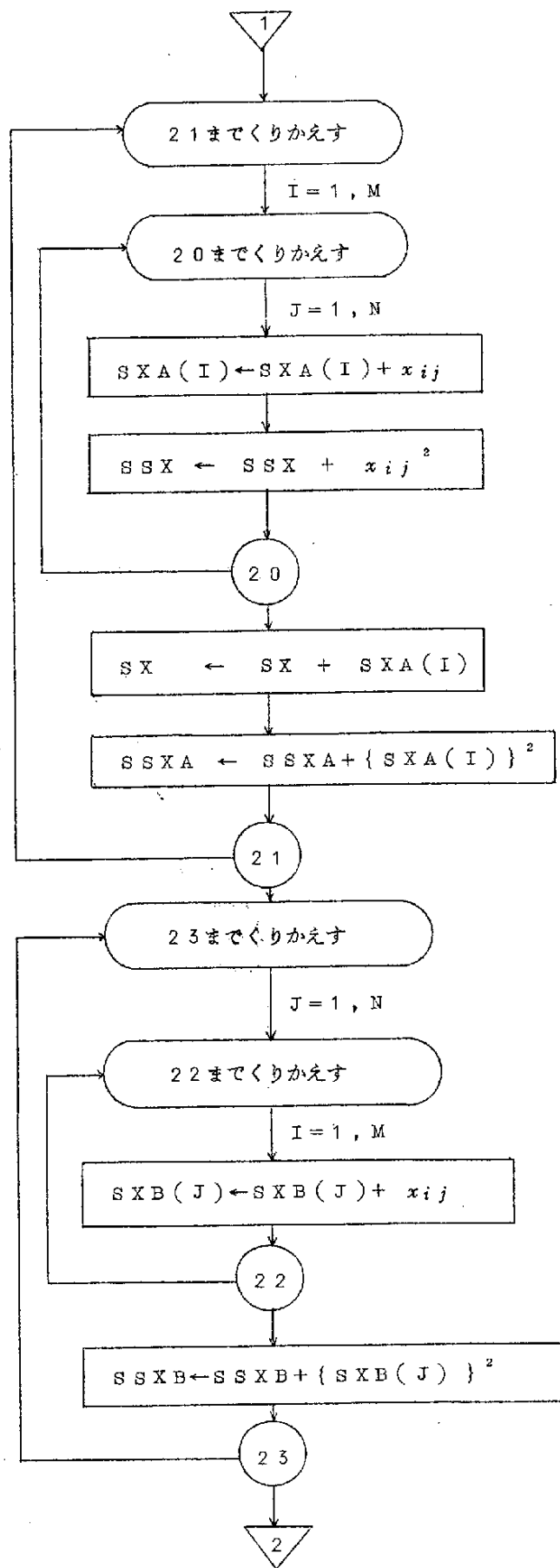
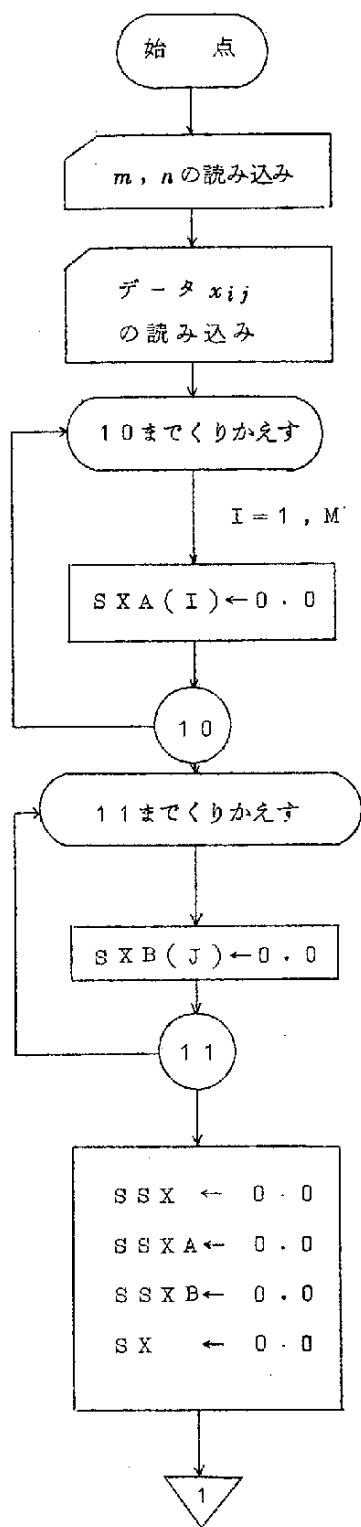
TABLE OF ANALYSIS OF VARIANCE

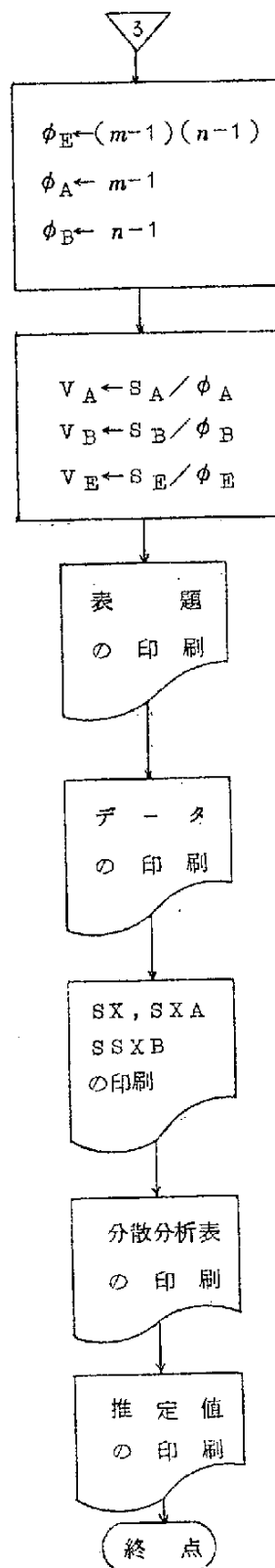
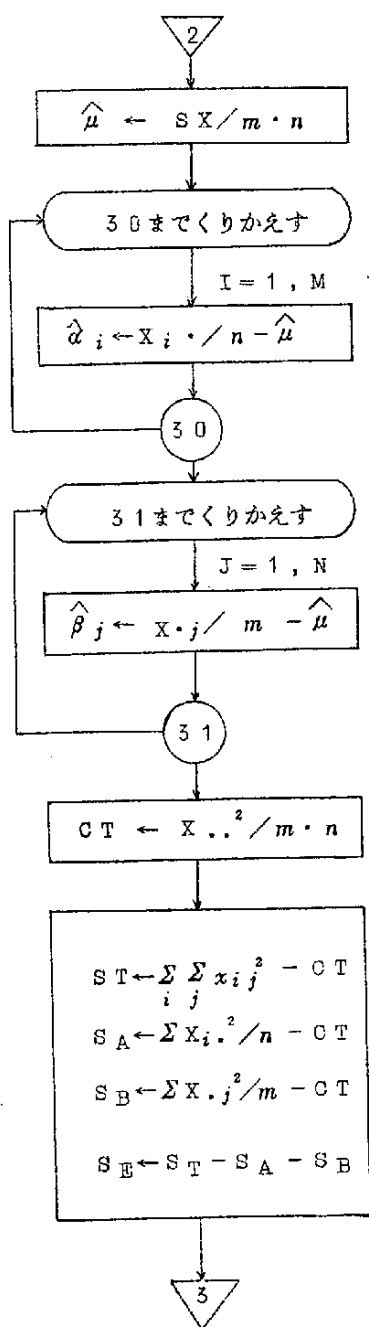
VAR.	D.F.	S.S.	M.S.	FO	F
FACTOR A	2	.96	.48	24.0000	5.14
FACTOR B	3	1.68	.56	28.0000	4.76
ERROR	6	.12	.02		
TOTAL	11	2.76			

```

HAT M      23.0000
HAT A      .2000    .2000    -.4000
HAT B     -.6000    .2000    .4000    0.0000

```



(1) デイメンションをとる。

```
DIMENSION X(30,30), SXN(30), SXM(30), AHAT(30),
BHAT(30)
```

これで $n \leq 30, m \leq 30$ までの計算ができる。

(2) データの個数およびデータの読み込み

```
READ 100, M, N
100 FORMAT (2I4)
READ 101, ((X(I, J), J=1, N), I=1, M)
101 FORMAT (25F3.0)
```

1 ~ 4	5 ~ 8	
m	n	

1 ~ 3	4 ~ 6	7 ~ 9						
x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{21}	x_{22}	...		

(3) 計算の準備

```
AM = M
AN = N
DO 10 I=1, M
10 SXN(I)=0.0
DO 11 J=1, N
11 SXM(J)=0.0
SSX = 0.0
SSXN= 0.0
SSXM= 0.0
SX  = 0.0
```

これで和を作る所はすべて0にしておく。

(4) 和の計算

```
DO 21 I=1, M
```

```

D0 20 J=1, N
SXN(I) = SXN(I) + X(I, J)
SSX = SSX + X(I, J) * X(I, J)
20 CONTINUE
SX = SX + SXN(I)
SSXN = SSXN + SXN(I) * SXN(I)
21 CONTINUE
D0 23 J=1, N
D0 22 I=1, M
SXM(J) = SXM(J) + X(I, J)
22 CONTINUE
SSXM = SSXM + SXM(J) * SXM(J)
23 CONTINUE
HATM = SX / (AM * AN)
D0 30 I=1, M
AHAT(I) = SXN(I) / AN - HATM
30 CONTINUE
D0 31 J=1, N
BHAT(J) = SXM(J) / AM - HATM
31 CONTINUE

```

以上によると次の結果がえられる。

$$\begin{aligned}
 SXN(I) &= \sum_j x_{ij} = X_i \\
 SSX &= \sum_{i,j} x_{ij}^2 \\
 SX &= \sum_{i,j} x_{ij} = \sum_i (\sum_j x_{ij}) = X_{..} \\
 SSXN &= \sum_i (\sum_j x_{ij})^2 = \sum_j x_{i.}^2 \\
 SXM(J) &= \sum_i x_{ij} = X_{.j} \\
 SSXM &= \sum_j (\sum_i x_{ij})^2 = \sum_j X_{.j}^2 \\
 HATM &= X_{..} / m \cdot n = \hat{\mu} \\
 AHAT(I) &= X_i \cdot / n - \hat{\mu} \\
 BHAT(J) &= X_{.j} / m - \hat{\mu}
 \end{aligned}$$

(5) 平方和の計算

$$\begin{aligned}CT &= SX * SX / (AM * AN) \\T\bar{O}TAL &= SSX - CT \\FACTA &= SSXN / AN - CT \\FACTB &= SSXM / AM - CT \\ERROR &= T\bar{O}TAL - FACTA - FACTB\end{aligned}$$

以上により次の式が得られる。

$$\begin{aligned}CT &= X_{..}^2 / m \cdot n \\T\bar{O}TAL &= \sum_i \sum_j x_{ij}^2 - CT = ST \\FACTA &= \sum_i x_{i.}^2 / n - CT = SA \\FACTB &= \sum_j x_{.j}^2 / m - CT = SB \\ERROR &= ST - SA - SB\end{aligned}$$

(6) 自由度の計算

$$\begin{aligned}IFE &= (M - 1) * (N - 1) \\IFT &= M * N - 1 \\IFA &= M - 1 \\IFB &= N - 1\end{aligned}$$

これで自由度がえられる。

$$\begin{aligned}IFE &= (m - 1) (n - 1) = \phi_E \\IFT &= m \cdot n - 1 = \phi_T \\IFA &= m - 1 = \phi_A \\IFB &= n - 1 = \phi_B\end{aligned}$$

(7) 不偏分散の計算

$$\begin{aligned}AMS &= FACTA / (AM - 1.0) \\BMS &= FACTB / (AN - 1.0) \\EMS &= ERROR / (AM - 1.0) * (AN - 1.0)\end{aligned}$$

これにより不偏分散が次の如く得られる。

$$V_A = S_A / (m - 1)$$

$$V_B = S_B / (n - 1)$$

$$V_E = S_E / (m - 1) (n - 1)$$

(8) 作表その他の印刷

```

PRINT 200
200 FÖRMAT(1H1,20H ANALYSIS OF VARIANCE///)
PRINT 201,((X(I,J),J=1,N),SXN(I),I=1,M)
201 FÖRMAT(1H,11F6.0)
PRINT 201,(SXM(J),J=1,N)
PRINT 207,SSX,SSXN,SSXM
207 FÖRMAT(1H0//4HSSX,F12.0/4HSSXN,F12.0,
14HSSXM,F12.0)
PRINT 202
202 FÖRMAT(1H///5X,4HVAR.,9X,4HD.F.,4X,
14HS.S.,6X.4HM.S.)
PRINT 203,IFA,FACTA,AMS,IFB,FACTB,BMS,IFE,
1ERRÖR,EMS,IFT,TÖTAL
203 FÖRMAT(3X,7HFACTORA,I10,2F10.2/3X,7HFACTORB,
1I10,2F10.2/5X,5HERRÖR,I10,2F10.2/5X,5HTÖTAL,
2I10,F10.2////)
PRINT 206, HATM
PRINT 204,(AHAT(I),I=1,M)
PRINT 205,(BHAT(J),J=1,N)
204 FÖRMAT(6H A HAT,14F8.2)
205 FÖRMAT(6H B HAT,14F8.2)
206 FÖRMAT(6H M HAT,F8.2)
CALL EXIT
END

```

以上のプログラムにより次の表が得られる。

ANALYSIS OF VARIANCE

x_{11}	x_{12}		x_{1n}	$\bar{X}_{1.}$
x_{21}	x_{22}		x_{2n}	$\bar{X}_{2.}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_{m1}	x_{m2}		x_{mn}	$\bar{X}_{m.}$
$\bar{X}_{.1}$	$\bar{X}_{.2}$		$\bar{X}_{.n}$	

$$SSX \sum x_{ij}^2$$

$$SSXN \sum x_{i.}^2$$

$$SSXM \sum x_{.j}^2$$

VAR.	D.F.	S.S.	M.S.	F.
FACTORA	ϕ_A	S_A	V_A	
FACTORB	ϕ_B	S_B	V_B	
ERROR	ϕ_E	S_E	V_E	
TOTAL	ϕ_T	S_T	V_T	
MHAT	$\hat{\mu}$			
AHAT	$\hat{\alpha}_1$	$\hat{\alpha}_2$		$\hat{\alpha}_n$
BHAT	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2$		$\hat{\beta}_m$

以上でプログラムは終了する。

問 7. 2^n 型計画を解析せよ。

2^n 型計画の計算は勿論普通の方法でできるが、このときは Yates の方法という巧妙な方法がある。

たとえば $n = 3$ の場合で説明をする。

因子 A, B, C がともに 2 水準とする。これを $A_0, A_1, B_0, B_1, C_0, C_1$ とする。これにより 3 因子, 2 水準の要因実験としてとく。

直交表により

No.	A	B	C	記 号	デ - タ
1	0	0	0		x_1
2	1	0	0	a	x_2
3	0	1	0	b	x_3
4	1	1	0	ab	x_4
5	0	0	1	c	x_5
6	1	0	1	ac	x_6
7	0	1	1	bc	x_7
8	1	1	1	abc	x_8

なるデータが得られているとする。このとき次のようになる。

$$CT = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)^2 / 8$$

$$SA = [(x_1 + x_3 + x_5 + x_7)^2 + (x_2 + x_4 + x_6 + x_8)^2] / 4 - CT$$

$$= (-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 + x_8)^2 / 8$$

$$\text{一般に } \frac{1}{4}(A^2+B^2) - \frac{1}{8}(A+B)^2 = \frac{1}{8}(A-B)^2 = \frac{1}{8}(B-A)^2$$

同様に

$$S_B = (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_8)^2 / 8$$

$$S_C = (-x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8)^2 / 8$$

以下

$$S_{A \times B} = (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 + x_7 - x_8)^2 / 8$$

$$S_{A \times C} = (-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 - x_8)^2 / 8$$

$$S_{B \times C} = (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - x_7 - x_8)^2 / 8$$

$$S_{A \times B \times C} = (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7 + x_8)^2 / 8$$

これを計算するのに次の Yates の方法が簡単である。

(0)	(1)	(2)	(3)
x_1	$x_1 + x_2 = y_1$	$y_1 + y_2 = Z_1$	$Z_1 + Z_2$
x_2	$x_3 + x_4 = y_2$	$y_3 + y_4 = Z_2$	$Z_3 + Z_4$
x_3	$x_5 + x_6 = y_3$	$y_5 + y_6 = Z_3$	$Z_5 + Z_6$
x_4	$x_7 + x_8 = y_4$	$y_7 + y_8 = Z_4$	$Z_7 + Z_8$
x_5	$-x_1 + x_2 = y_5$	$-y_1 + y_2 = Z_5$	$-Z_1 + Z_2$
x_6	$-x_3 + x_4 = y_6$	$-y_3 + y_4 = Z_6$	$-Z_3 + Z_4$
x_7	$-x_5 + x_6 = y_7$	$-y_5 + y_6 = Z_7$	$-Z_5 + Z_6$
x_8	$-x_7 + x_8 = y_8$	$-y_7 + y_8 = Z_8$	$-Z_7 + Z_8$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = W_1$$

$$= -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_6 - x_7 + x_8 = W_2$$

$$= -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_8 = W_3$$

$$= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 - x_6 - x_7 + x_8 = W_4$$

$$= -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = W_5$$

$$= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - x_5 + x_6 - x_7 + x_8 = W_6$$

$$= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6 + x_7 + x_8 = W_7$$

$$= -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 - x_7 + x_8 = W_8$$

すなわち

$$C_T = W_1^2 / 8$$

$$S_A = W_2^2 / 8$$

$$S_B = W_3^2 / 8$$

$$S_C = W_5^2 / 8$$

$$S_{A \times B} = W_4^2 / 8$$

$$S_{A \times C} = W_6^2 / 8$$

$$S_{B \times C} = W_7^2 / 8$$

$$S_{A \times B \times C} = W_8^2 / 8$$

で得られる。これを計算をするのである。

記号

n : N

2^n : NS

y_i : $Y(I)$

```

C      2**N-GATA-KEIKAKU
      DIMENSION Y(64),SY(64)
      READ 100,N
100    FORMAT(I1)
      NS=2**N
      M=NS/2
      FNS=NS
      PRINT 200
200    FORMAT(1H1,15X,17H2**N-GATA-KEIKAKU)
      PRINT 201,N,NS
201    FORMAT(1H0,5X,4HN = ,I1,5X,10HDATA SU = ,
1I2//17X,4HDATA/)
      READ 101,(Y(I),I=1,NS)
101    FORMAT(6F12.0)
      PRINT 202,(I,Y(I),I=1,NS)
202    FORMAT(1H ,I7,4X,F6.1)
      DO 10 J=1,N
      DO 11 I=1,M
      I2=2*I
      W1=Y(I2-1)
      W2=Y(I2)
      MI=M+1
      SY(MI)=W2-W1
      SY(I)=W1+W2
11    CONTINUE
      DO 12 I=1,NS

```

```

      Y(I)=SY(I)
12  CONTINUE
10  CONTINUE
      PRINT 204
204  FORMAT(1H0,5X,2HNO,5X,6HSUITEI,6X,7HHEIHOWA)
      DO 13 I=1,NS
      SY(I)=Y(I)*Y(I)/FNS
13  CONTINUE
      S=0.0
      DO 14 I=2,NS
      J=I-1
      PRINT 205,J,Y(I),SY(I)
205  FORMAT(1H,5X,I2,F10.3,3X,F10.4)
      S=S+SY(I)
14  CONTINUE
      NS1=NS-1
      PRINT 206,Y(1),S,NS1
206  FORMAT(1H0,4X,3HKEI, F10.3,3X,F10.4,4X,I2)
      CALL EXIT
      END

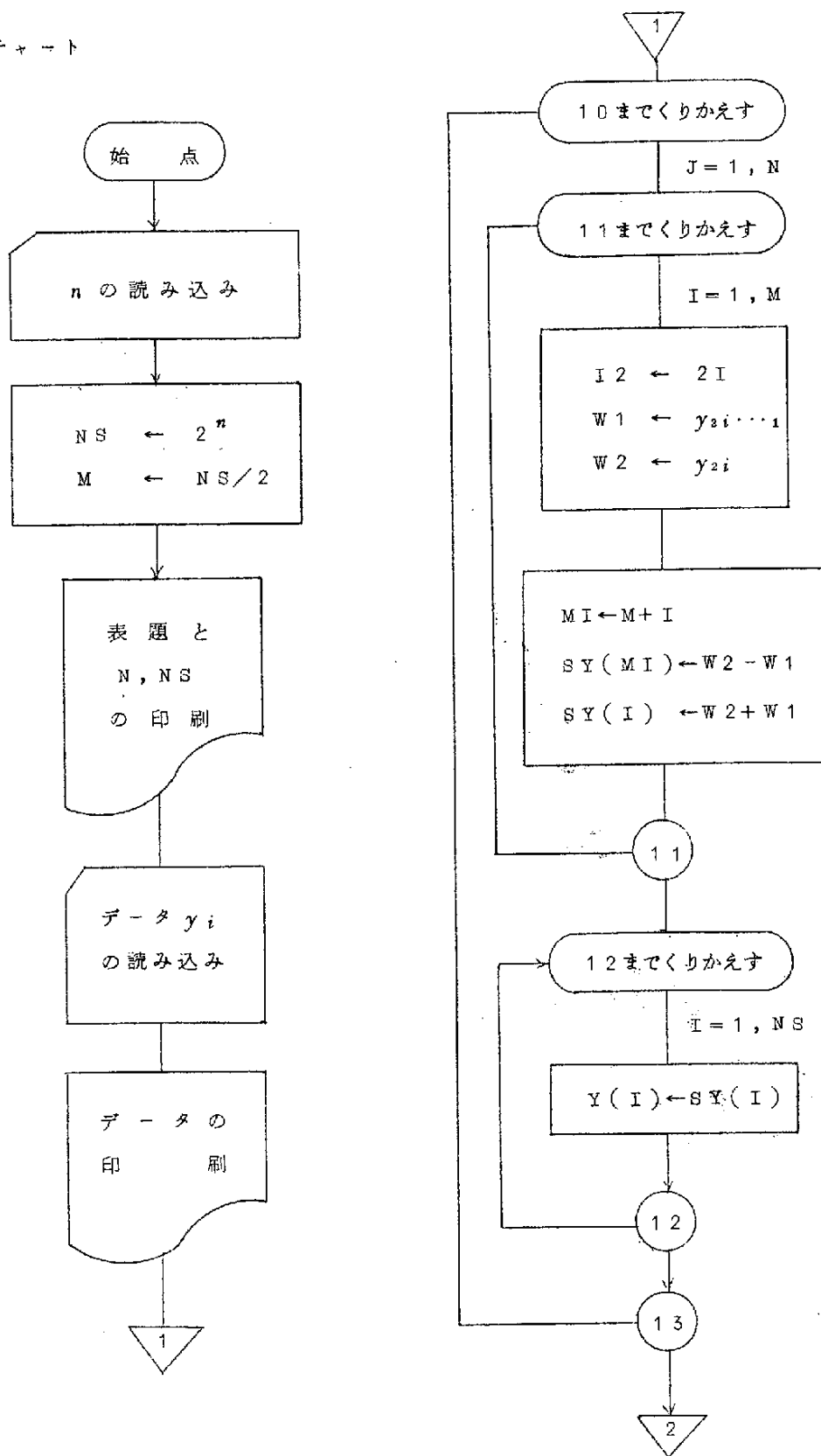
```

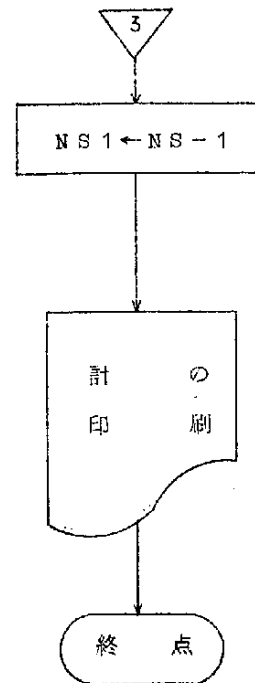
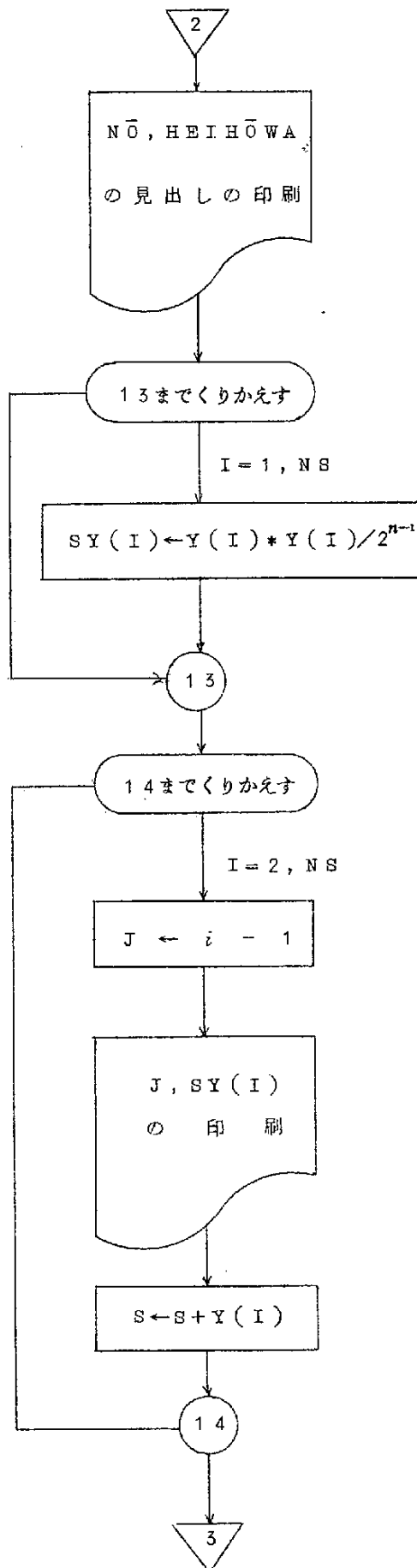
2**N-GATA-KEIKAKU

N = 4	DATA SU=16	NO	SUITEI	HEIHOWA
	DATA			
1	1.6	1	-1.300	.1056
2	.4	2	-2.100	.2756
3	.7	3	.300	.0056
4	.6	4	-.300	.0056
5	.7	5	.500	.0156
6	.8	6	.900	.0506
7	.6	7	-1.100	.0756
8	.7	8	2.100	.2756
9	1.0	9	.900	.0506
10	1.4	10	-.300	.0056
11	.8	11	-1.900	.2256
12	.8	12	.700	.0306
13	1.2	13	-2.500	.3906
14	1.1	14	-.100	.0006
15	1.2	15	1.100	.0756
16	.7	KEI	14.300	1.5893

15

フローチャート





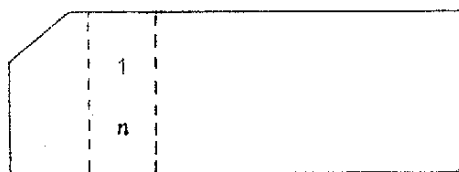
(1) N の読み込みおよび表題の印刷

```

        DIMENSION Y(64), SY(64)
        READ(5,100) N
100    FORMAT(I1)
        NS=2**N
        M = NS/2
        FNS=NS
        WRITE(6,200)
200    FORMAT(1H1,15X,17H2**N-GATA-KEIKAKU)
        WRITE(6,201) N, NS
201    FORMAT(1H0,5X,4HN= ,I1,5X,10HDATA SU= ,I2//
        17X,4H DATA/)

```

データカード



$n \leq 6$ であるので1桁で十分である。

$$NS = 2^n$$

$$M = 2^n / 2$$

表題と n の印刷は次の形ででる。

```

        2**N-GATA-KEIKAKU
N = n    DATA SU = 2^n
        DATA

```

(2) データの読み込みと印刷

```

        READ(5,101)(Y(I), I=1, NS)
101    FORMAT(6F12.0)
        WRITE(6,202)(Y(I), I=1, NS)
202    FORMAT(1H ,12X,E16.7)

```

データカード

	1~12	13~24	25~36	37~48	49~60	61~72	
	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	
	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}	y_{12}	

印刷

$y_1 \leftarrow 0.1093000E+003 = 109.3$
 $y_2 \leftarrow 0.1071000E+003 = 107.1$
 $\vdots$
 $y_{12} \leftarrow 0.1059000E+003 = 105.9$

(3) 計算

```

D O 10 J=1, N
D O 11 I=1, M
I2=2*I
W1=Y(I2-1)
W2=Y(I2)
MI=M+I
SY(MI)=W2-W1
SY(I)=W1+W2
11 C O N T I N U E
D O 12 I=1, NS
Y(I)=SY(I)
12 C O N T I N U E
10 C O N T I N U E

```

```

n = 4
J = 1
I = 1    I2=2
W1=Y(1)=y1
W2=Y(2)=y2
MI=2n-1+1=23+1=9
SY(MI)=W2-W1=-y1+y2=SY(9)

```

$$SY(I) = W_2 + W_1 = y + y_2 = SY(1)$$

$$I = 2 \quad I_2 = 4$$

$$W_1 = Y(3) = y_3$$

$$W_2 = Y(4) = y_4$$

$$MI = 8 + 2 = 10$$

$$SY(10) = W_2 - W_1 = -y_3 + y_4$$

$$SY(2) = W_2 + W_1 = y_3 + y_4$$

以下同様にして

$$SY(11) = -y_5 + y_6$$

$$SY(3) = y_5 + y_6$$

$$SY(12) = -y_7 + y_8$$

$$SY(4) = y_7 + y_8$$

$$\vdots$$

$$SY(16) = -y_{15} - y_{16}$$

$$SY(8) = y_{15} + y_{16}$$

が得られる。

ここで、 $Y(I) = SY(I)$ によって第2段の準備に入る。第2段は第1段と同じことを繰返せば良い。すなわち

$$J = 2$$

$$I = 1 \quad SY(9) = -Y(1) + Y(2)$$

$$= -y_1 - y_2 + y_3 + y_4$$

$$SY(1) = Y(1) + Y(2)$$

$$= y_1 + y_2 + y_3 + y_4$$

$$\vdots$$

以下同様にして行なわれる。J = nまで行なえば計算は終了する。

(4) 平方和の表題の印刷

```
WRITE(6,204)
204 FORMAT(1H0,5X,2HNO,10X,7H HEIHŌWA)
印刷形式
NO      HEIHŌWA
```

(5) 平方和の計算

```
DŌ 13 I=1,NS
SY(I)=Y(I)*Y(I)/FNS
13 CONTINUE
```

これによって $Y(I)$ には最終計算が入っているので

$$SY(1) = \{Y(I)\}^2 / 2^n$$

が得られる。すなわち平方和である。

(6) 平方和の印刷

```
S = 0.0
DO 14 I = 2, NS
  J = I - 1
  WRITE(6, 205) J, SY(I)
205  FORMAT(1H, 5X, I2, 5X, E16.7)
  S = S + Y(I)
14  CONTINUE
NS1 = NS - 1
WRITE(6, 206) S, NS1
206  FORMAT(1H0, 4X, 3HKEI, 5X, E16.7, 4X, I2)
CALL EXIT
END
```

これによって、(4)で準備したものの下に

NO	HEIHŌWA
SY(1)	0.7022500E+001 = 7.0225
SY(2)	0.1024000E+002 = 10.24
⋮	⋮
SY(16)	0.1102500E+001 = 1.1025
KEI	0.1280000E+002 = 12.8

自由度 15

の如く印刷される。

このとき自由度はすべて1であるので不偏分散の値は同一である。実際の場合はこのうち各要因がどこに割りつけられているかによって適当に表を作る必要がある。

以上でプログラムを終了する。

問8. 多項式をとくこと。

$$y_i = \alpha_0 + \alpha_1 x_i + \alpha_2 x_i^2 + \cdots + \alpha_n x_i^n + \varepsilon_i$$
$$(i = 1 \cdots m)$$

を解くこと。

データは (x_i, y_i) の形で与えられる。データ個数 m は 100 以下、次数 n は 20 以下とする。

主な記号

$$\begin{aligned} X(I) &: x_i \\ Y(I) &: y_i \\ A(I, J) &: a_{ij} = \sum x_i x_j \\ S(J) &: \sum x_i^j \\ XN(J) &: x_i^j \\ AN(J) &: \sum x_i^j \cdot y_i = B_j \\ M &: m \\ N &: n \end{aligned}$$

多項式をとくとき式の形は次のようにする。

$$y_i = C + \beta_1(x_i - \bar{x}) + \beta_2(x_i^2 - \bar{x}^2) + \cdots + \beta_n(x_i^n - \bar{x}^n) + \varepsilon_i$$

ただし

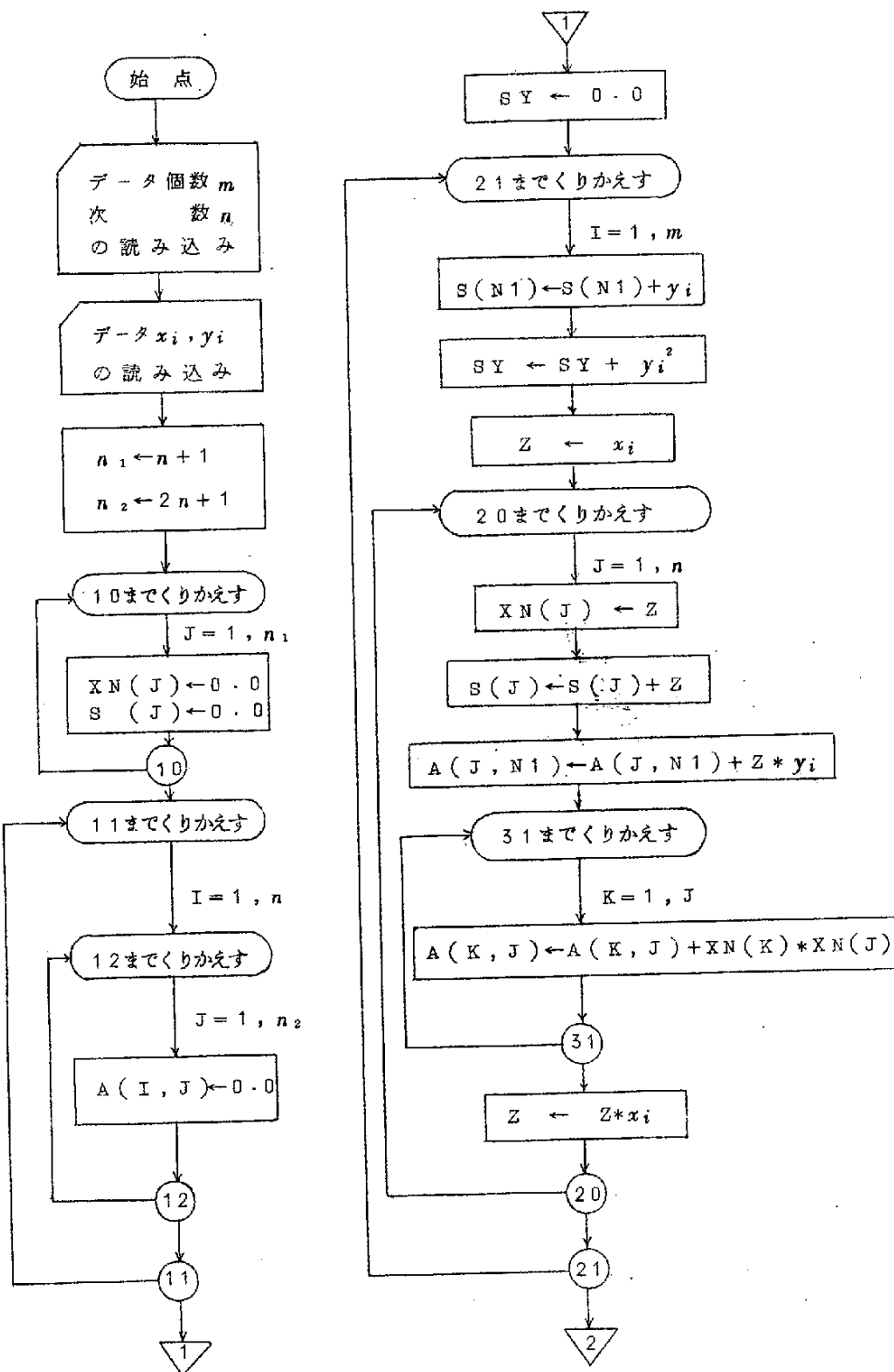
$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \sum x_i \\ \bar{x}^2 &= \frac{1}{m} \sum x_i^2 \\ &\vdots \\ \bar{x}^n &= \frac{1}{m} \sum x_i^n \end{aligned}$$

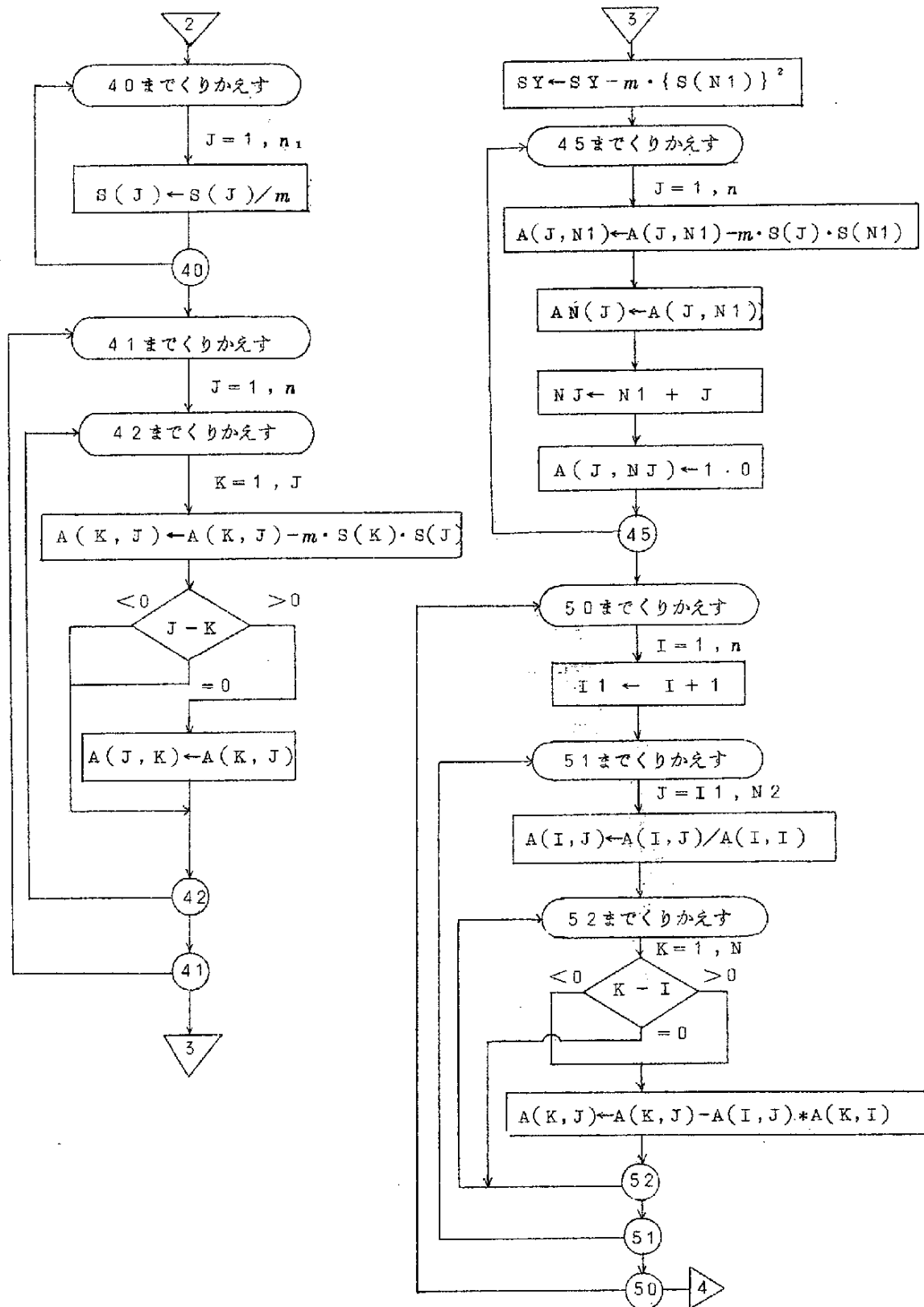
これより正規方程式は次のようになる。

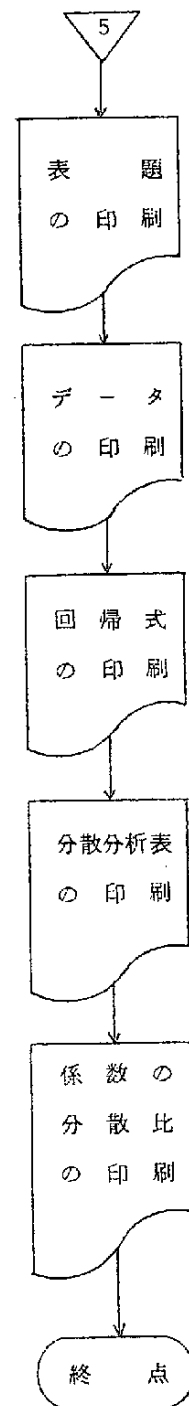
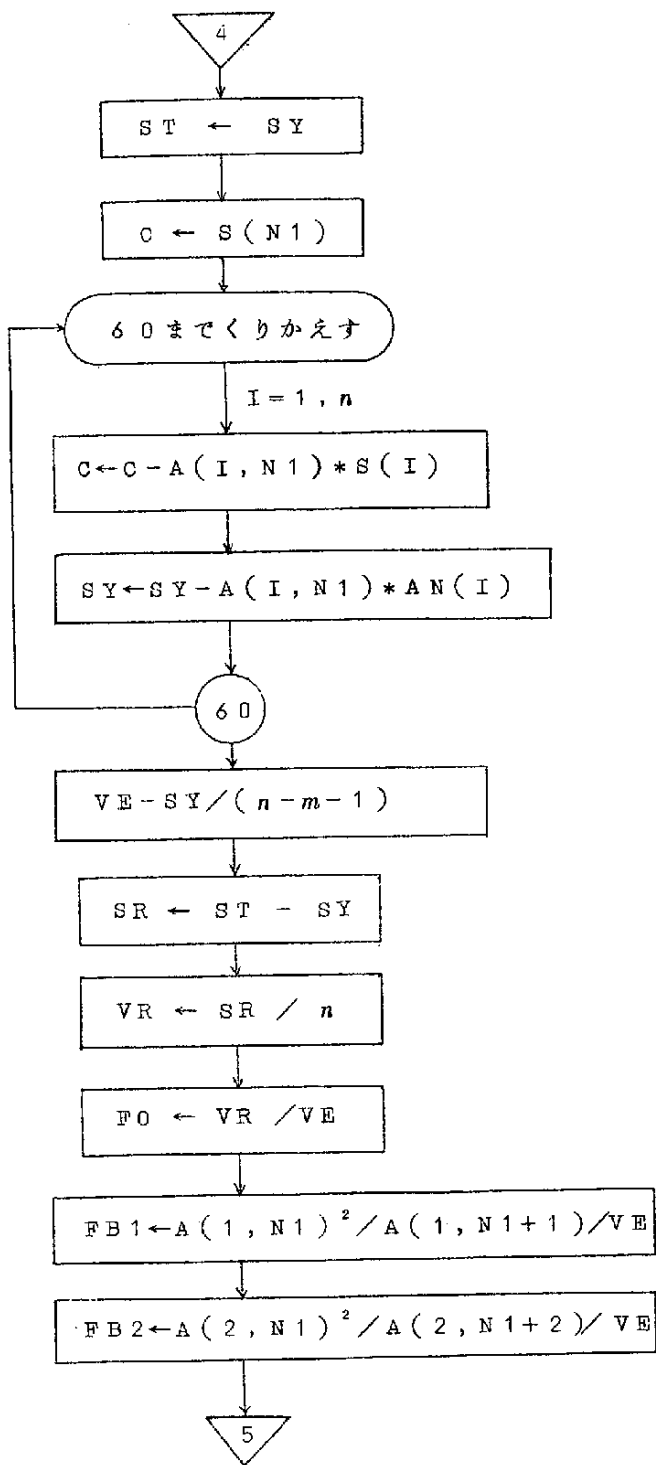
$$\begin{aligned} m \hat{C} &= \sum y_i \\ \alpha_{11} \hat{\beta}_1 + \alpha_{12} \hat{\beta}_2 + \cdots + \alpha_{1n} \hat{\beta}_n &= B_1 \\ \alpha_{21} \hat{\beta}_1 + \alpha_{22} \hat{\beta}_2 + \cdots + \alpha_{2n} \hat{\beta}_n &= B_2 \\ &\vdots \\ \alpha_{n1} \hat{\beta}_1 + \alpha_{n2} \hat{\beta}_2 + \cdots + \alpha_{nn} \hat{\beta}_n &= B_n \\ \alpha_{kj} &= \sum x_i^k x_i^j - m \cdot \bar{x}^k \cdot \bar{x}^j \\ B_k &= \sum x_i^k y_i - m \bar{x}^k \cdot \bar{y} \end{aligned}$$

正規方程式をとくときは消却法を用いる。

その具体的な手続きはプログラム中で説明する。







```

C      ANALYSIS OF POLYNOMIAL REGRESSION
C      N-TH ORDER NUMBER OF DATA IS M
      DIMENSION X(100),Y(100),S(21),XN(21),A(20,41),
1 AN(20)
      REAP 100,N,M
      READ 101,(X(I),Y(I),I=1,M)
100 FORMAT(2I3)
101 FORMAT(12X,2F12.0)
      N1=N+1
      N2=2*N+1
      DO 10 J=1,N1
      XN(J)=0.0
      S(J)=0.0
10 CONTINUE
      DO 11 I=1,N
      DO 12 J=1,N2
      A(I,J)=0.0
12 CONTINUE
11 CONTINUE
      SY=0.0
      DO 21 I=1,M
      S(N1)=S(N1)+Y(I)
      SY=SY+Y(I)**2
      Z=X(I)
      DO 20 J=1,N
      XN(J)=Z
      S(J)=S(J)+Z
      A(J,N1)=A(J,N1)+Z*Y(I)
      DO 31 K=1,J
      A(K,J)=A(K,J)+XN(K)*XN(J)
31 CONTINUE
      Z=Z*X(I)
20 CONTINUE
21 CONTINUE
      AM=M
      DO 40 J=1,N1
      S(J)=S(J)/AM

```

```

40  CONTINUE
    DO 41 J=1, N
    DO 42 K=1, J
      A(K, J)=A(K, J)-AM*S(K)*S(J)
      IF(J-K) 42, 42, 43
43  A(J, K)=A(K, J)
42  CONTINUE
41  CONTINUE
      SY=SY-AM*S(N1)**2
      DO 45 J=1, N
      A(J, N1)=A(J, N1)-AM*S(J)*S(N1)
      AN(J)=A(J, N1)
      NJ=N1+J
      A(J, NJ)=1.0
45  CONTINUE
      DO 50 I=1, N
      I1=I+1
      DO 51 J=I1, N2
      A(I, J)=A(I, J)/A(I, I)
      DO 52 K=1, N
      IF(K-I) 53, 52, 53
53  A(K, J)=A(K, J)-A(I, J)*A(K, I)
52  CONTINUE
51  CONTINUE
50  CONTINUE
      ST=SY
      C=S(N1)
      DO 60 I=1, N
      C=C-A(I, N1)*S(I)
      SY=SY-A(I, N1)*AN(1)
60  CONTINUE
      NDEF=M-N-1
      DEF=NDEF
      VE=SY/DEF
      SR=ST-SY
      MM=M-1
      ANN=N

```

```

VR=SR/ANN
FO=VR/VE
FB1=A(1,N1)**2/A(1,N1+1)/VE
FB2=A(2,N1)**2/A(2,N1+2)/VE
PRINT 201
201 FORMAT(1H1,6X,19HREGRESSION ANALYSIS///)
PRINT 202
202 FORMAT(7X,11HSAMPLE DATA)
PRINT 203, (I,I=1,10),(X(I),I=1,10),(Y(I),
1 I=1,10),(I,I=11,20),(X(I),I=11,20),(Y(I),
2 I=11,20)
203 FORMAT(3H0N0,10I6/ 4H X ,10F6.0/4H Y ,10F6.0)
PRINT 204, C,(A(I,N1),I=1,2)
204 FORMAT (///4H Y =,E16.7,3H +,E16.7,5H X +,
1E16.7,5H X**2///)
PRINT 205, SR,N,VR,FO,SY,NDEF,VE,ST,MM
205 FORMAT(11X,29HTABLE OF ANALYSIS OF VARIANCE/
16H VAR,12X,2HSS,9X,2HDF,7X,2HMS,14X,2HFO/
211H REGRESSION,E16.7,14,2E16.7/9H RESIDUAL,
32X,E16.7,14,E16.7/6H TOTAL,5X,E16.7,14///)
PRINT 206, FB1,FB2
206 FORMAT(32H SIGNIFICANT TEST OF COEFFICIENT//
16H FB1 = ,E16.7/6H FB2 = ,E16.7)
CALL EXIT
END

```

REGRESSION ANALYSIS
SAMPLE DATA

NO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	-4.	-3.	-3.	-3.	-2.	-2.	-1.	-1.	-1.	0.
Y	51.	49.	50.	51.	49.	50.	48.	49.	50.	48.
NO	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
X	0.	0.	1.	1.	2.	2.	3.	3.	4.	4.
Y	49.	50.	49.	50.	50.	51.	50.	51.	52.	53.

$$Y = 4.9086310E+01 + 1.6867830E-01 X + 1.6029650E-01 X**2$$

TABLE OF ANALYSIS OF VARIANCE

VAR	SS	DF	MS	FO
REGRESSION	2.0406903E+01	2	1.0203451E+01	1.8081613E+01
RESIDUAL	9.5930970E+00	17	5.6429982E-01	
TOTAL	3.0000000E+01	19		

SIGNIFICANT TEST OF COEFFICIENT

FB1 = 5.6376117E+00

FB2 = 2.6447727E+01

(1) データの読み込み

```

      DIMENSION X(100), Y(100), S(21), XN(21),
      A(20, 41), AN(20)
      READ 100, N, M
      READ 101, (X(I), Y(I), I=1, M)
100  FORMAT (2I3)
101  FORMAT (12X, 2F12.0)

```

データ個数のカード

1 ~ 3	4 ~ 6	
n	m	

データカード

1 ~ 12	13 ~ 24	25 ~ 36	
no-i	x _i	y _i	

読まない

(2) 和を作る準備

```
N1 = N + 1
N2 = 2 * N + 1
DO 10 J = 1, N1
  XN(J) = 0.0
  S(J) = 0.0
10 CONTINUE
DO 11 I = 1, N
  DO 12 J = 1, N2
    A(I, J) = 0.0
  12 CONTINUE
11 CONTINUE
```

これで $XN(1), XN(2), \dots, XN(N1)$ までの $n+1$ 個および $S(1), S(2), \dots, S(N1)$ までの $n+1$ 個および

$A(1, 1)$	$A(1, 2)$	$\dots$	$A(1, N2)$
$A(2, 1)$	$A(2, 2)$	$\dots$	$A(2, N2)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$A(N, 1)$	$A(N, 2)$	$\dots$	$A(N, N2)$

の $n \times (2n+1)$ 個がすべて 0 になる。

(3) 正規方程式の係数を作る。

```
SY = 0.0
DO 21 I = 1, M
  S(N1) = S(N1) + Y(I)
  SY = SY + Y(I) ** 2
  Z = X(I)
DO 20 J = 1, N
  XN(J) = Z
  S(J) = S(J) + Z
  A(J, N1) = A(J, N1) + Z * Y(I)
DO 31 K = 1, J
  A(K, J) = A(K, J) + XN(K) * XN(J)
31 CONTINUE
Z = Z * X(I)
20 CONTINUE
21 CONTINUE
```

これで

$$\begin{aligned}
S(N1) &= \sum y_i \\
SY &= \sum y_i^2 \\
S(1) &= \sum x_i \\
S(2) &= \sum x_i^2 \\
&\vdots \\
S(N) &= \sum x_i^N \\
A(1, N1) &= \sum x_i y_i \\
A(2, N1) &= \sum x_i^2 y_i \\
&\vdots \\
A(N, N1) &= \sum x_i^N y_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A(1, 1) &= \sum x_i x_i & A(1, 2) &= \sum x_i x_i^2 & A(1, 3) &= \sum x_i x_i^3 & A(1, N) &= \sum x_i x_i^N \\
&& A(2, 2) &= \sum x_i^2 x_i^2 & A(2, 3) &= \sum x_i^2 x_i^3 & A(2, N) &= \sum x_i^2 x_i^N \\
&&&& A(3, 3) &= \sum x_i^3 x_i^3 & A(3, N) &= \sum x_i^3 x_i^N \\
&&&&&& \vdots \\
&&&&&& A(N, N) &= \sum x_i^N x_i^N
\end{aligned}$$

が得られる。

(4) 回帰式として

$$y_i = \beta_0 + \beta_1(x_i - \bar{x}) + \beta_2(x_i^2 - \bar{x}^2) + \cdots + \beta_n(x_i^n - \bar{x}^n)$$

を用いるとすれば正規方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
m\beta_0 &= \sum y_i \\
\alpha_{11}\hat{\beta}_1 + \alpha_{12}\hat{\beta}_2 + \cdots + \alpha_{1n}\hat{\beta}_n &= \alpha_{1n+1} = B_1 \\
\alpha_{21}\hat{\beta}_1 + \alpha_{22}\hat{\beta}_2 + \cdots + \alpha_{2n}\hat{\beta}_n &= \alpha_{2n+1} = B_2 \\
&\vdots \\
\alpha_{n1}\hat{\beta}_1 + \alpha_{n2}\hat{\beta}_2 + \cdots + \alpha_{nn}\hat{\beta}_n &= \alpha_{nn+1} = B_n
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\alpha_{ij} &= \sum x_k^i x_k^j - m\bar{x}^i \bar{x}^j \\
\alpha_{in+1} &= \sum x_k^i y_k - m\bar{x}^i \bar{y}
\end{aligned}$$

である。これを前段の(3)より求める。

$$\begin{aligned}
AM &= M \\
D\bar{O} &= 40 \quad J=1, N1
\end{aligned}$$

```

      S(J) = S(J) / AM
40  CONTINUE
      DO 41 J = 1, N
      DO 42 K = 1, J
      A(K, J) = A(K, J) - AM * S(K) * S(J)
      IF (J - K) 42, 42, 43
43  A(J, K) = A(K, J)
42  CONTINUE
41  CONTINUE

```

これにより $S(J) = \frac{1}{m} \sum x_i^j = \bar{x}_J$ となり

$$\begin{aligned}
 A(K, J) &= \sum x_i^k x_i^j - m \cdot \bar{x}^k \cdot \bar{x}_J \\
 &= a_{k,j}
 \end{aligned}$$

が得られる。

$A(J, K) = A(K, J)$ によって、 $a_{k,j}$ のすべてが求まる。これは正規方程式が対称であることを用いればより少ない回数の計算でできる。

```

      SY = SY - AM * S(N1) ** 2
      DO 45 J = 1, N
      A(J, N1) = A(J, N1) - AM * S(J) * S(N1)
      AN(J) = A(J, N1)
      NJ = N1 + J
      A(J, NJ) = 1.0
45  CONTINUE

```

これにより

$$S_y = \sum y^2 - m(\bar{y})^2$$

および

$$B_j = a_{j, n+1} = \sum x_i^j y_i - m \bar{x}^j \bar{y}$$

が得られる。 $AN(J)$ として B_j をとっておく。

正規方程式をとくときに同時に逆行列もとくことにする。そのための準備として

$$\begin{array}{cccccccc}
 \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & = & B_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
 \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & = & B_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & & & \\
 \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} & = & B_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
 \end{array}$$

をとくことにする。そのために

$\alpha_{1, n+2} = 1.0, \alpha_{2, n+3} = 1.0, \dots, \alpha_{n, n+n+1} = 1.0$ と入れておく, その他はすでに 0 になっている。

(5) 正規方程式をとく。とき方は消却法を用いる。

```

D O 50 I=1, N
I 1=I+1
D O 51 J=I 1, N2
A (I, J)=A (I, J)/A (I, I)
D O 52 K=1, N
I F (K-I) 53, 52, 53
53 A (K, J)=A (K, J)-A (I, J)*A (K, I)
52 C O N T I N U E
51 C O N T I N U E
50 C O N T I N U E

```

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \alpha_{1n+1} & 1 & & \times \frac{1}{\alpha_{11}} & \\
 1 & \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}} & \cdots & \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}} & \frac{\alpha_{1n+1}}{\alpha_{11}} & \frac{1}{\alpha_{11}} & 0 & \cdots & 0
 \end{array}$$

これを新しく

$$1 \quad \alpha_{12} \quad \cdots \quad \alpha_{1n} \quad \alpha_{1n+1} \quad \alpha_{1n+2} \quad \alpha_{1n+3} \quad \cdots \quad \alpha_{1n+n+1}$$

とおき, これに $\alpha_{21}, \alpha_{31}, \dots, \alpha_{n1}$ をかけて第 2 行, 第 3 行, $\dots$ 第 n 行からひく。

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \alpha_{22} - \alpha_{12} \cdot \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{2n} - \alpha_{1n} \cdot \alpha_{21} & \cdots & \cdots & \\
 0 & \alpha_{32} - \alpha_{12} \alpha_{31} & & \alpha_{3n} - \alpha_{1n} \alpha_{31} & & \cdots &
 \end{array}$$

これを新しく $\alpha_{22} \cdots \alpha_{2n}, \alpha_{32} \cdots \alpha_{3n} \cdots$ とおく。

これで前の行列の形は下のようなになる。

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} & \alpha_{1, n+1} & \alpha_{1, n+2} & \cdots \alpha_{1n+n+1} \\
 0 & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} & \alpha_{2, n+1} & \alpha_{2, n+2} & \cdots \alpha_{2n+n+1} \\
 0 & \alpha_{32} & \cdots & \alpha_{3n} & \alpha_{3, n+1} & \alpha_{3, n+2} & \cdots \alpha_{3n+n+1} \\
 \vdots & \vdots & & & & &
 \end{array}$$

第 2 行を α_{22} でわる。これを新しい α_{2j} とする。

$$0 \quad 1 \quad \alpha_{23} \quad \cdots \quad \alpha_{2n} \quad \alpha_{2n+1} \quad \alpha_{2n+2} \quad \cdots \quad \alpha_{2n+n+1}$$

これに $\alpha_{12}, \alpha_{32}, \dots$ をかけて第 1 行, 第 3 行などから引く。引いた後を新しい α_{ij} とする。すると次のような形になる。

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 0 & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1n} & \cdots \cdots \cdots & \alpha_{1n+n+1} \\
0 & 1 & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2n} & \cdots \cdots \cdots & \alpha_{2n+n+1} \\
0 & 0 & \alpha_{33} & \cdots & \alpha_{3n} & \cdots \cdots \cdots & \alpha_{3n+n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & \alpha_{n3} & \cdots & \alpha_{nn} & \cdots \cdots \cdots & \alpha_{nn+n+1}
\end{array}$$

以下つづけると

$$\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{1n} & \alpha_{1n+1} & \cdots \cdots \cdots \alpha_{1n+n+1} \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_{2n} & \alpha_{2n+1} & \cdots \cdots \cdots \alpha_{2n+n+1} \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_{3n} & \alpha_{3n+1} & \cdots \cdots \cdots \alpha_{3n+n+1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha_{nn} & \alpha_{nn+1} & \cdots \cdots \cdots \alpha_{nn+n+1}
\end{array}$$

がえられる。

このときの $\alpha_{1n}, \alpha_{2n}, \dots, \alpha_{nn}$ が $\beta, \beta_2, \dots, \beta_n$ の推定の値となる。また

$$\begin{array}{cccc}
\alpha_{1n+1} & \alpha_{1n+2} & \cdots & \alpha_{1n+n+1} \\
\alpha_{2n+1} & \alpha_{2n+2} & \cdots & \alpha_{2n+n+1} \\
\vdots & & & \\
\alpha_{nn+1} & \alpha_{nn+2} & \cdots & \alpha_{nn+n+1}
\end{array}$$

が逆行列

$$\begin{array}{cccc}
C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\
C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn}
\end{array}$$

を示している。

(6) 推定値，平方和その他の計算

```

ST=SY
C =S ( N1 )
DO 60 I=1, N
C=C-A ( I, N1 ) * S ( I )
SY=SY-A ( I, N1 ) * AN ( I )
60 CONTINUE
NDEF=M-N-1
DEF=NDEF

```

$$V E = S Y / D E F$$

$$S R = S T - S Y$$

$$M M = M - 1$$

$$A N N = 1$$

$$V R = S R / A N N$$

$$F O = V R / V E$$

$$F B 1 = A (1 , N 1) * * 2 / A (1 , N 1 + 1) / V E$$

$$F B 2 = A (2 , N 1) * * 2 / A (1 , N 1 + 2) / V E$$

$$S Y = S y = \sum (y_i - \bar{y})^2, \quad S (N 1) = \bar{y}$$

$$C = \bar{y} - \sum \beta_i \cdot \bar{x}^i$$

$$= \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} - \hat{\beta}_2 \bar{x}^2 - \dots - \hat{\beta}_n x_n$$

となる。これは定数を与える。

$$S Y = S y - \sum_i \hat{\beta}_i \cdot B_i$$

$$= S y - \hat{\beta}_1 B_1 - \hat{\beta}_2 B_2 \dots - \hat{\beta}_n B_n$$

で残差 $S \epsilon$ を与える。その自由度 $\phi \epsilon$ は $m - n - 1$ で与えられる。よって不偏分散は $V \epsilon = S \epsilon / \phi \epsilon$ で与えられる。回帰にもとづく平方和 $S R = S y - S \epsilon$ 今は $S Y$ は $S \epsilon$ になり, $S T$ に $S y$ が入っている。で与えられる回帰にもとづく項の不偏分散 $V R = S R / \phi R = S R / n$ 分散分析表を作れば

要 因	平 方 和	自 由 度	不 偏 分 散	分 散 比
回 帰	$S R$	n	$V R$	F_0
残 差	$S \epsilon$	$\phi \epsilon$	$S \epsilon$	
計	$S y$	$m - 1$		

$$F_0 = V R / S \epsilon$$

なお

$F B 1, F B 2$ は第 1 次項, 第 2 次項の係数の不偏分散比である。

$$F_1 = \frac{\hat{\beta}_1^2}{C_{11} \cdot V E}$$

$$F_2 = \frac{\hat{\beta}_2^2}{C_{22} \cdot V E}$$

(7) 以上の値の印刷

PRINT 201 以下によってプログラムの次につけてある結果が得られる。

```
PRINT 201
201 FORMAT(1H1, 6X, 19HREGRESSION ANALYSIS ///
PRINT 202
202 FORMAT(7X, 11HSAMPLE DATA)
PRINT 203, (I, I=1, 10), (X(I), I=1, 10), (Y(I), I=1,
1 10), (I, I=11, 20), (X(I), I=11, 20), (Y(I), I=11, 20)
203 FORMAT(3HONŌ, 10I6/4H X , 10F6.0/4H Y ,
10F6.0)
PRINT 204, C, (A(I, N1), I=1, 2)
204 FORMAT (///4H Y =, E16.7, 3H +, E16.7, 5H X +,
1 E16.7, 5H X**2///)
PRINT 205, SR, N, VR, FO, SY, NDEF, VE, ST, MM
205 FORMAT(11X, 29HTABLE OF ANALYSIS OF VARIANCE
1/6H VAR, 12X, 2HSS, 9X, 2HDF, 7X, 2HMS, 14X, 2HFO
2/11H REGRESSION, E16.7, I4, 2E16.7/9H RESIDUAL,
3 2X, E16.7, I4, E16.7/6H TŌTAL, 5X, E16.7, I4///)
PRHNT 206, FB1, FB2
206 FORMAT(32H SIGNIFICANT TEST OF COEFFICIENT//
1 6H FB1 =, E16.7/7H FB2 =, E16.7)
CALL EXIT
END
```

以上でプログラムはすべて終了する。

参 考 書

ここでは日本語では比較的手に入り易いものを2, 3挙げるにとどめる。

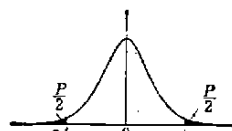
- (1) 森 口 繁 一 「統計解析」 岩波
現代応用数学 B・10-6
最小二乗法についてとくに理論的に詳しい。
- (2) 小 西 省 三 「実験計画法」 日刊工業
分散分析法、とくに 2^n , 3^n 型について例題が多くのもっていてわかり易い。
- (3) 田 口 玄 一 「実験計画法」上・下 丸善
やや大部であるが実際家にも理論家にも面白い本である。工場実験例が多くのもっている。
- (4) スネデッカー, 奥野, 畑村, 津村 訳
「統計的方法」改訂版 岩波
農業方面の本であるが実験計画法そのものが農業で始められているので基本的な考え方を知ることができる。
- (5) デミング, 森口 訳
「推計学によるデータのまとめ方」 岩波
回帰式のとき方を最小二乗法にもとづいて行なっている。色々な実例が多くある。
- (6) 増 山 元三郎 「少数例のまとめ方」1, 2, 竹内書店
実例および理論両面にわたり、分り易く書いてある。統計的手法の基本的な本である。

数 値 表 以下の表は日本科学技術連盟の付表 A , B よりとったものである。

t 表

$\phi, P \rightarrow t$
(自由度 ϕ と両側確率 P とから t を求める表)

$$P = 2 \int_t^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\phi+1}{2}\right) dv}{\sqrt{\phi\pi} \Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right) \left(1 + \frac{v^2}{\phi}\right)^{\frac{\phi+1}{2}}}$$



$P \searrow \phi$	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.001	$P \nearrow \phi$
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619	1
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.598	2
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.941	3
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610	4
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.859	5
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959	6
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.405	7
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041	8
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781	9
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587	10
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437	11
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318	12
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221	13
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140	14
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073	15
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015	16
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965	17
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922	18
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883	19
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850	20
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819	21
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792	22
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.767	23
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745	24
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725	25
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707	26
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690	27
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674	28
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659	29
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646	30
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551	40
60	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460	60
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373	120
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291	∞

例 $\phi=10, P=0.05$ に対する t の値は、2.228 である。これは自由度 10 の t 分布に従う確率変数が 2.228 以上の絶対値をもって出現する確率が 5%であることを示す。

注 1. $\phi > 30$ に対しては $120/\phi$ を用いる 1 次補間が便利である。(→ p. 35)

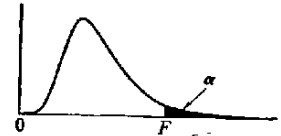
注 2. 表から読んだ値を $t(\phi, P)$, $t_P(\phi)$, $t_\phi(P)$ などと記すことがある。

F 表 (1%, 5%)

$F_{\alpha}^{\phi_1, \phi_2}(\alpha)$

$\alpha = \begin{cases} 0.05 \dots \text{細字} \\ 0.01 \dots \text{太字} \end{cases}$

$$\alpha = \int_0^{\infty} \frac{\phi_1^{\frac{\phi_1-1}{2}} \phi_2^{\frac{\phi_2-1}{2}} X^{\frac{\phi_1+\phi_2-1}{2}} dX}{B(\frac{\phi_1}{2}, \frac{\phi_2}{2}) (\phi_1 X + \phi_2)^{\frac{\phi_1+\phi_2}{2}}}$$



(自由度 ϕ_1, ϕ_2 から, 上側確率 5% および 1% に対する F の値を求める表)(細字は 5%, 太字は 1%)

$\phi_2 \backslash \phi_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞	$\phi_1 \backslash \phi_2$
1	161. 4052	200. 5000	216. 5403	225. 5625	230. 5764	234. 5859	237. 5928	239. 5982	241. 6022	242. 6056	244. 6106	246. 6157	248. 6209	249. 6235	250. 6261	251. 6287	252. 6313	253. 6339	254. 6366	1
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	2
3	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	3
4	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53	4
5	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1	5
6	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63	6
7	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5	7
8	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36	8
9	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02	9
10	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67	10
11	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88	11
12	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23	12
13	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65	13
14	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93	14
15	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86	15
16	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71	16
17	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31	17
18	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.84	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54	18
19	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91	19
20	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40	20
21	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60	21
22	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30	22
23	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36	23
24	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21	24
25	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17	25
26	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13	26
27	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00	27
28	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07	28
29	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87	29
30	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01	30
40	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75	40
60	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96	60
120	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65	120
∞	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92	∞
1	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57	1
2	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88	2
3	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49	3
4	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84	4
5	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42	5
6	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81	6
7	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36	7
8	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78	8
9	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31	9
10	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.00	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76	10
11	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26	11
12	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73	12
13	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21	13
14	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71	14
15	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17	15
16	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69	16
17	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13	17
18	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67	18
19	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10	19
20	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65	20
21	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06	21
22																				

直交多項式 ($n = 2 \sim 10$)

$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$
X_1	$X_1 X_2$	$X_1 X_2 X_3$	$X_1 X_2 X_3 X_4$	$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$	$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$
-1	-1 1	-3 1 -1	-2 2 -1 1	-5 5 -5 1 -1	-3 5 -1 3 -1
1	0 -2	-1 -1 3	-1 -1 2 -4	-3 -1 7 -3 5	-2 0 1 -7 4
	1 1	1 -1 -3	0 -2 0 6	-1 -4 4 2 -10	-1 -3 1 1 -5
		3 1 1	1 -1 -2 -4	1 -4 -4 2 10	0 -4 0 6 0
			2 2 1 1	3 -1 -7 -3 -5	1 -3 -1 1 5
				5 5 5 1 1	2 0 -1 -7 -4
					3 5 1 3 1
2	2 6	20 4 20	10 14 10 70	70 84 180 28 252	28 84 6 154 84

$n=8$	$n=9$	$n=10$
$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$	$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$	$X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$
-7 7 -7 7 -7	-4 28 -14 14 -4	-9 6 -42 18 -6
-5 1 5 -13 23	-3 7 7 -21 11	-7 2 14 -22 14
-3 -3 7 -3 -17	-2 -8 13 -11 -4	-5 -1 35 -17 -1
-1 -5 3 9 -15	-1 -17 9 9 -9	-3 -3 31 3 -11
1 -5 -3 9 15	0 -20 0 18 0	-1 -4 12 18 -6
3 -3 -7 -3 17	1 -17 -9 9 9	1 -4 -12 18 6
5 1 -5 -13 -23	2 -8 -13 -11 4	3 -3 -31 3 11
7 7 7 7 7	3 7 -7 -21 -11	5 -1 -35 -17 1
	4 28 14 14 4	7 2 -14 -22 -14
		9 6 42 18 6
168 168 264 616 2184	60 2772 990 2002 468	330 132 8580 2860 780

n のもっと大きな値については数値表 B または新編統計数値表 (河出書房) を参照されたい。

n	X_1	X_2	X_3
3	$x - 2$	$3x^2 - 12x + 10$	— — — — —
4	$2x - 5$	$x^2 - 5x + 5$	$\frac{1}{3} (10x^3 - 75x^2 + 167x - 105)$
5	$x - 3$	$x^2 - 6x + 7$	$\frac{1}{6} (5x^3 - 45x^2 + 118x - 84)$
6	$2x - 7$	$\frac{1}{2} (3x^2 - 21x + 28)$	$\frac{1}{6} (10x^3 - 105x^2 + 317x - 252)$
7	$x - 4$	$x^2 - 8x + 12$	$\frac{1}{6} (x^3 - 12x^2 + 41x - 36)$
8	$2x - 9$	$x^2 - 9x + 15$	$\frac{1}{3} (2x^3 - 27x^2 + 103x - 99)$
9	$x - 5$	$3x^2 - 30x + 55$	$\frac{1}{6} (5x^3 - 75x^2 + 316x - 330)$
10	$2x - 11$	$\frac{1}{2} (x^2 - 11x + 22)$	$\frac{1}{6} (10x^3 - 165x^2 + 761x - 858)$
11	$x - 6$	$x^2 - 12x + 26$	$\frac{1}{6} (5x^3 - 90x^2 + 451x - 546)$
12	$2x - 13$	$3x^2 - 39x + 91$	$\frac{1}{3} (2x^3 - 39x^2 + 211x - 273)$

2ⁿ 型 直 交 表

要因	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
16	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
15	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-	+	-
14	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-
13	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+
12	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-
11	-	+	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+
10	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-	-	-	+	+	+
9	-	-	+	-	+	+	-	+	-	-	+	-	+	+	-
8	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	-
7	-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+
6	+	-	-	+	+	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+
5	-	-	+	+	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-
4	+	+	+	-	-	-	-	-	-	-	+	+	+	+	+
3	-	+	-	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-
2	+	-	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	-
1	-	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+

要因	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
混入する2因子交互作用	BC	AC	AB	AE	AD	AG	AF	AI	AH	AK	AJ	AM	AL	AO	AN
	DE	DF	DG	BF	BG	BD	BE	BJ	BK	BH	BI	BN	BO	BL	BM
	FG	EG	EF	CG	CF	CE	CD	CK	CJ	CI	CH	CO	CN	CM	CL
	HI	HJ	HK	HL	HM	HN	HO	DI	DM	DN	DO	DH	DI	DJ	DK
	JK	IK	IJ	IM	IL	IO	IN	EM	EL	EO	EN	EI	EH	EK	EJ
	LM	LN	LO	JN	JO	JL	JM	FN	FO	FL	FM	FJ	FK	FL	FH
	NO	MO	MN	KO	KN	KM	KL	GO	GN	GM	GL	GK	GJ	GI	GH

基本表	A	B	A B	D	A D	B D	A B D	H	A H	B H	A B H	D	A D H	B D H	A B D H
-----	---	---	-----	---	-----	-----	-------	---	-----	-----	-------	---	-------	-------	---------

3ⁿ 型 直 交 表

No.	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	1
3	2	0	2	2	0	2	2	0	0	2	2	2	2
4	0	1	1	2	0	0	0	1	1	1	1	2	2
5	1	1	2	0	0	1	1	1	1	2	2	0	0
6	2	1	0	1	0	2	2	1	1	0	0	1	1
7	0	2	2	1	0	0	0	2	2	2	2	1	1
8	1	2	0	2	0	1	1	2	2	0	0	2	2
9	2	2	1	0	0	2	2	2	2	1	1	0	0
10	0	0	0	0	1	1	2	1	2	1	2	1	2
11	1	0	1	1	1	2	0	1	2	2	0	2	0
12	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0	1	0	1
13	0	1	1	2	1	1	2	2	0	2	0	0	1
14	1	1	2	0	1	2	0	2	0	0	1	1	2
15	2	1	0	1	1	0	1	2	0	1	2	2	0
16	0	2	2	1	1	1	2	0	1	0	1	2	0
17	1	2	0	2	1	2	0	0	1	1	2	0	1
18	2	2	1	0	1	0	1	0	1	2	0	1	2
19	0	0	0	0	2	2	1	2	1	2	1	2	1
20	1	0	1	1	2	0	2	2	1	0	2	0	2
21	2	0	2	2	2	1	0	2	1	1	0	1	0
22	0	1	1	2	2	2	1	0	2	0	2	1	0
23	1	1	2	0	2	0	2	0	2	1	0	2	1
24	2	1	0	1	2	1	0	0	2	2	1	0	2
25	0	2	2	1	2	2	1	1	0	1	0	0	2
26	1	2	0	2	2	0	2	1	0	2	1	1	0
27	2	2	1	0	2	1	0	1	0	0	2	2	1

基本表	A A A			E A A B B B	E E E E E	A A A A	A A A A
	B B B ²	E E E ²	E E E ²				
表示	A B B B ²	E E E E ²	E E E E ²	E E E E ²	E E E E ²	E E E E ²	E E E E ²

2因子交互作用の混入規則	A	A E F G	A H J M	A I K L
	B	B E H I	B F J L	B G K M
	C	C E J K	C F I M	C G H L
	D	D E L M	D F H K	D G I J

統計解析

(禁無断転載)

著 者 東京理科大学 米 沢 慎 吾
助 教 授

発 行 者 財団法人 日本情報処理開発センター
東京都港区芝公園21号地1-5 機械振興会館
TEL (434) 8211 (代)

印 刷 所 有限会社 盛 光 印 刷 所
千代田区飯田橋4-6-3
TEL (262) 5959・1331

